

# Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 9

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie, falls existent, den Summenwert von

$$\sum_{\substack{m,n=0 \\ m \leq n}}^{\infty} \binom{n}{m} 2^{m-2n}.$$

**Aufgabe 2:** Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x-h) - f(x+h)) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Ist  $f$  stetig? (Beweis oder Gegenbeispiel)

**Aufgabe 3:**

(a) Bestimmen Sie, falls existent,  $\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$ .

(b) Erklären Sie, wie die Stetigkeit von  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  aus

$$x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{und} \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

dem Ergebnis von (a) folgt.

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, daß  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = |z|$  stetig ist.

**Aufgabe 5:**

(a) Seien  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig in  $\mathbb{C}$ . Zeigen Sie, daß

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad 1/f, \quad f \circ g$$

(auf ihren möglichen Definitionsbereichen) stetig sind.

(b) Sei  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Polynom. Zeigen Sie, dass es stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass  $\sin$  und  $\cos$  stetige Funktionen sind.  
 Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 und die Eulerformel.

**Aufgabe 6:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) \leq f(b)$ . Zeigen Sie folgendes Korollar zum Nullstellensatz (Zwischenwertsatz):

$$\forall p \in [f(a), f(b)] \exists c \in [a, b] : f(c) = p$$

**Aufgabe 7:** Es sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Zeigen Sie:

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ streng monoton.}$$