

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 8

Aufgabe 1: Man betrachte die rekursiv definierte Folge $x_0 := 0$ und $x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$ für $n \geq 0$; das ist die Folge

$$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$$

Man zeige, daß die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen 2 konvergiert.

Hinweis: Zeige, (z.B. durch Induktion) daß die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch 2 nach oben beschränkt ist (Monotonie der Wurfelfunktion darf vorausgesetzt werden) und folgere die Monotonie der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Man führe den Limes auf beiden Seiten aus, wobei $\sqrt{\quad}$ und Limes vertauscht werden dürfen (Stetigkeit der Wurfelfunktion darf vorausgesetzt werden) Daraus bestimme man den Grenzwert.

Aufgabe 2: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = x.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

die Werte

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}, \text{ und } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4: Welche der folgenden Reihen sind divergent, welche konvergent und welche absolut konvergent? Beweisen Sie Ihre Antworten.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1} \right)^2 \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^4 + 17}{3n^4 + n} \right)^n \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k \right) \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n-1} \tag{6}$$

Aufgabe 5: Man bestimme die Konvergenzradien der folgenden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!} \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2} \quad (10)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} x^{2k}. \quad (11)$$