MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2010/2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 7

Aufgabe 1: (a) Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion, d.h. $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$. Zeigen Sie mit der Interpretation des Integrals als "Fläche unter Kurve" dass

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ logarithmisch divergiert.

(c) Sei $a > 1$. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ konvergiert.

(d) Was ist mit dem Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n ln(n)}$?

Aufgabe 2: Man berechne, falls existent:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \right)$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+q)^n} \text{ für } q \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3: Man zeige: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

Aufgabe 4: Zeige: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
Hinweis: Es gibt zwei schnelle Lösungen: 1.) n durch $a_n := \sqrt[n]{n} - 1$ ausdrücken und geeignet abschätzen. Oder 2.) Verwenden Sie die Ungleichung zwischen arithmetischen und geometrischen Mitteln.

Aufgabe 5: Sei $x_n := (1 - \frac{1}{n^2})^n$. Man zeige, daß die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert.

Aufgabe 6: (Bolzano Weierstraß für mehrere Dimensionen.) Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit der Norm: $\|\mathbf{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sei $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß die Folge $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens einen Häufungspunkt hat.
Hinweis: Bilden Sie geschickte Teilfolgen.