MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2010/2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 6

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y \mid\ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ ein Körper ist. Dabei ist $\mathrm{i}^2 = -1$. Man kann diesen Körper auch als $\mathbb{R}^2$ mit $(x,y)+(x',y') := (x+x', y+y')$ und $(x,y)\cdot(x',y') := (xx'-yy', xy'+x'y)$ auffassen.

(b) Kann man $\mathbb{C}$ anordnen?

(c) Zeigen Sie, daß $\begin{array}{rcl} |\cdot| : \mathbb{C} & \to & [0,\infty[\\ z = x+iy & \mapsto & |z| = \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$ eine Norm auf $\mathbb{C}$ definiert.
Hinweis: Verwende $\begin{array}{rcl} \sqrt{\cdot} : [0,\infty[& \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ ist monoton steigend, d.h. wenn $x_1 < x_2$ dann auch $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

Aufgabe 2:

(a) Geben Sie die Polarkoordinatendarstellung von $3+2i$ an.

(b) Geben Sie $2e^{\pi i/4}$ in der Form $a+bi$ an

(c) Berechnen Sie $|3e^{0,3\pi i} + 2e^{-1,6\pi i}|$.

(d) Finden Sie die dritten Wurzeln der Zahl $w = 3+4i$.

(e) Berechnen Sie:
$$\frac{-2+7i}{5+2i},\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)^6.$$

(f) Man finde alle (komplexen) Nullstellen des Polynoms $x^3 + 2x^2 + 3x - 6$

Aufgabe 3: Man charakterisiere geometrisch (Skizze) diejenigen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt:

$$|z-2| + |z+2| = 5 \qquad (1)$$
$$0 < \mathrm{Re}(iz) < 1 \qquad (2)$$

Aufgabe 4: Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ sei $f(z) = \dfrac{iz-1}{i-z}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung f injektiv ist. Wer mag, kann auch über den Bildbereich nachdenken.

Aufgabe 5:

(a) Bestimmen Sie, falls vorhanden, Infimum und Supremum der folgenden Mengen:
$$M_1 = \left\{1 - \frac{1}{n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\},\ M_2 = \left\{2^{-n}\middle| n \in \mathbb{N}\right\}, M_3 = \left\{\sin x\middle| x \in \mathbb{R}\right\},\ M_4 = \left\{\frac{1}{x}\middle| x > 0\right\}.$$

(b) Sei A eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente, monoton fallende Folge oberer Schranken von A. Sei $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Dann gilt: $x_n \geq x$ und x ist obere Schranke von A.