MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2010/2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 5

Aufgabe 1:

(a) Es sei X eine unendliche Menge. Zeige, daß es eine injektive Abbildung $f : X \to X$ gibt, die nicht surjektiv ist und daß es eine surjektive Abbildung $g : X \to X$ gibt, die nicht injektiv ist. Hinweis: Sie können aus jeder unendlichen Menge abzählbar viele Elemente auswählen.

(b) Für welche endlichen Mengen M, N gilt: $f : M \to N$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f : M \to N$ ist surjektiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 2: Man zeige

(a) Das karthesische Produkt $P = M \times N$ zweier abzählbarer Mengen M und N (d.h. die Menge aller Tupel (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$) ist abzählbar. Verallgemeinern Sie die Aussage auf karthesische Produkte von mehr als zwei Mengen.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von abzählbaren Mengen. Dann ist das unendliche karthesische Produkt

$$M = \times_{n\in\mathbb{N}} M_n$$

abzählbar.
Anmerkung: Man widerlegt Aussagen z.B. durch Auffinden eines Gegenbeispiels.

(c) Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten heißen algebraische Zahlen. Die sind abzählbar, denn man zeige: Die Menge aller Polynome $(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k)$ beliebigen Grades $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ mit ganzzahligen Koeffizienten (a_k) ist abzählbar.

Aufgabe 3: Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

(a) $a_n := \frac{(n+1)(3n^2-n)}{(2n-5)^5}, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist.

(b) $a_n := \frac{n^2-1}{n^4+2n^3-2n-1}, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(c) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1},\ n \in \mathbb{N}$. Ist diese Folge konvergent und wenn ja, wogegen konvergiert sie? Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 4: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlen-Folge mit $x_n > 0,\ \forall n$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0\,.$$

Gilt auch die schärfere Aussage

$$\lim_{n\to\infty} x_n > 0\,?$$