

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 4

Aufgabe 1: Die Symbole $\wedge; \vee$ stehen für die logischen “und” und “oder”, die Symbole $\forall; \exists$ stehen “für alle” und “es existiert”, die Symbolreihung $\{x|\dots\}$ steht für die Menge aller x , die ... erfüllen. Vervollständigen Sie in den folgenden Ausdrücken:

Seien M_1 und M_2 Mengen, dann gilt

(a) $M_1 \cap M_2 = \{x|x \in \dots\}$

(b) $M_1 \cup M_2 = \{x|x \in \dots\}$

(c) $M_1 \subset M_2 \iff \forall x \in \dots$

(d) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist

$$\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x|\dots\}$$

und

$$\bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha = \{x|\dots\}$$

(e) Sei Ω eine Menge und $M \subset \Omega$. Dann bezeichnet $\Omega \setminus M = M^c := \{\omega \in \Omega | \omega \notin M\}$. Sei $M_1 \subset M_2 \subset \Omega$. Zeigen Sie: $M_2^c \subset M_1^c$.

(f) Zeigen Sie

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} M_\alpha^c$$

Hinweis: Gleichheit von Mengen $A = B$ kann man zeigen, indem man $A \subset B$ und $B \subset A$ (vgl. (c)) zeigt.

Aufgabe 2:

Der Multinomialkoeffizient (auch Polynomkoeffizient genannt) vom Grade $r \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$\binom{n}{n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_r} := \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

Seien x_1, \dots, x_r gegeben. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Multinomialformel

$$(x_1 + \dots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1, \dots, n_r=0 \\ n_1 + \dots + n_r = n}}^n \binom{n}{n_1 \quad \dots \quad n_r} x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_r^{n_r}.$$

Das Summenzeichen ist so zu verstehen, dass genau über diejenigen r -Tupel $(n_1, \dots, n_r) \in \{0, \dots, n\}^r$ summiert wird, bei denen $n_1 + \dots + n_r = n$ ist.

Bemerkung: Der Multinomialkoeffizient gibt auch die Anzahl der Zuordnungen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) von n Objekten auf r Kästen an.

Aufgabe 3: Es seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Zeige: Für $g \circ f : X \rightarrow Z$ gilt:

$$x \mapsto g(f(x))$$

- (a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.
- (b) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv.
- (c) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv.
- (d) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv.

Aufgabe 4:

Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv? Welche sind surjektiv, welche bijektiv? Beweisen Sie Ihre Aussage.

- (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \sin x$
- (b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x^3$

Hinweis für Bedenkenträger: Den Zwischenwertsatz darf man hier benutzen!

Zusatzaufgabe: (Gesetz der großen Zahlen)

Sei $\{0, 1\}^n = \{\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n\}$ die Menge der 0 – 1 n-Tupel. Sei für $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{N}_n^\varepsilon = \{\vec{x} \in \{0, 1\}^n \mid \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2}) \right| > \varepsilon\}$$

Man zeige das Gesetz der großen Zahlen für lange 0 – 1 n-Tupel:

$$\frac{1}{2^n} |\mathcal{N}_n^\varepsilon| \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Dies bedeutet dass die relativen Häufigkeiten von 0 oder 1 typischerweise ungefähr gleich sind. (Fluktuationen sind von der Größenordnung \sqrt{n}).

Hinweis: Die Aufgabe ist nicht schwer. Man darf nur keine Angst vor Summen haben:

- 1. Für die Elemente der Menge $\mathcal{N}_n^\varepsilon$ gilt:

$$\frac{|\sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2})|}{n\varepsilon} > 1$$

Im Hinblick auf $\mathcal{N}_n^\varepsilon \subset \{0, 1\}^n$ zeige man dass

$$|\mathcal{N}_n^\varepsilon| \leq \sum_{\vec{x} \in \{0, 1\}^n} \frac{|\sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2})|^2}{n^2\varepsilon^2}$$

- 2. Man zeige:

$$\left| \sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2}) \right|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - \frac{1}{2})^2 + \sum_{k,j=1, k \neq j}^n (x_k - \frac{1}{2})(x_j - \frac{1}{2})$$

wobei die zweite Summe eine Doppelsumme ist, in der über k und j summiert wird, jedoch müssen k und j verschieden sein. Von beiden Summen können Sie nun die Summe über alle 0 – 1 n-Tupel bilden.