

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 2

Aufgabe 1:

- (a) Zeigen Sie (z.B. mit vollständiger Induktion), dass jede natürliche Zahl ungleich 1 in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden kann, d.h. in symbolischer Sprache, wenn P die Menge der Primzahlen bezeichnet

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \exists k \in \mathbb{N} \text{ und } \exists p_1, \dots, p_k \in P : n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k.$$

Dabei brauchen die p_i , $i = 1, \dots, k$ nicht verschieden zu sein.

- (b) Zeigen Sie, dass es keine größte Primzahl gibt. Hinweis: Betrachten Sie $1 \cdot 2 \cdots p + 1$ unter der Annahme, p sei die größte Primzahl.

Aufgabe 2: Man zeige die *Eindeutigkeit* der Primfaktorenzerlegung: Man erhält (nach Vorlesung) aus der Wechselwegnahme (Euklidischer Algorithmus): Für natürliche Zahlen m, n existieren ganze Zahlen (d.h. positive und negative) q, p , so dass

$$\text{ggT}(m, n) = qm + pn.$$

- (a) Seien m, n Zahlen und p eine Primzahl. Man zeige:

$$m \cdot n \text{ teilbar durch } p \Leftrightarrow m \text{ oder } n \text{ teilbar durch } p.$$

- (b) Man verallgemeinere dies auf Produkte von mehr als zwei Zahlen. Hier kann man an vollständige Induktion denken.

Aufgabe 3: Man zeige: $\sqrt{n}$ ist irrational für alle natürlichen Zahlen $n > 1$, welche keine Quadratzahlen sind. *Hinweis:* Aufgabe 2.

Aufgabe 4: Neben der Iteration, die man aus der Wechselwegnahme von Diagonale und Seite des Quadrates bekommt, gibt es noch weitere Verfahren zur Bestimmung von $\sqrt{2}$:

Sei (x_n) eine Folge, “die gegen $\sqrt{2}$ geht”. Für große n ist dann $x_n \approx x_{n+1}$, also $(x_n - x_{n+1})^2 \approx 0$. Ausquadrieren und die Setzung $x_{n+1}^2 = 2$ führt auf die Rekursion

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}.$$

Zeigen Sie, daß diese Rekursion genauso gut wie die aus der Wechselwegnahme ist: Geben Sie die Konvergenzgeschwindigkeit dieser Rekursion in Abhängigkeit von $x_0 > 0$ an, d.h. schätzen Sie $|x_n - \sqrt{2}|$ ab. Anleitung: Zeigen Sie (1) $(x_{n+1} - x_n)^2 = x_{n+1}^2 - 2$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Folgern Sie (2) $x_n/2 \geq 1/x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie damit, daß $(x_n)_{n \geq 1}$ eine monoton fallende Folge ist, und weiter, dass

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{(\frac{1}{x_0} - \frac{x_0}{2})^2}{4^{n+1}\sqrt{2}}.$$

Berechnen Sie mit dieser Folge $\sqrt{2}$ auf 3 Dezimalen genau.

Aufgabe 5:

(a) Zeigen Sie die Bernoulli-Ungleichung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt für $x \geq -1$

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

(b) Sei $0 < q < 1$. Zeigen Sie: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N$

$$q^n \leq \epsilon.$$

Aufgabe 6:

Beweisen Sie

(a) Für $1 \neq q \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

(b) Es sei $|q| < 1$. Zeigen Sie, daß für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left| \sum_{k=0}^n q^k - \frac{1}{1-q} \right| < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$