

# Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 12

## Aufgabe 1:

Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x + x^2) - x}{x^2}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(1 + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln x)$$

**Aufgabe 2:** Entwickeln Sie die Funktion  $f$ , die für  $|x| < 1$  durch

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

definiert ist, in eine Taylor-Reihe um 0 bis zur zweiten Ordnung, d.h. approximieren Sie  $f$  durch das Taylor-Polynom zweiten Grades. Schätzen Sie den Fehler im Intervall  $[-\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}]$  ab. Stellen Sie die Funktion und die Approximation graphisch dar.

**Aufgabe 3:** Entwickeln Sie die Funktion  $f(x) = \sqrt{1+x}$ ,  $x > -1$ , in eine Taylor-Reihe um 0 bis zu der Ordnung, bei der der Fehler im Intervall  $[-\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}]$  kleiner als  $\frac{1}{1000}$  ist.

**Aufgabe 4:** Betrachten Sie die Funktion aus Aufgabe 2) Blatt 11. Entwickeln Sie die Funktion um den Nullpunkt bis zur zweiten Ordnung und geben Sie den Fehler an. Überlegen Sie sich, dass diese Funktion eine Taylorreihe erzeugt, die unendlichen Konvergenzradius hat aber nicht gegen die Funktion konvergiert.

## Aufgabe 5:

An welchen Stellen  $x \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ gekürzt} \end{cases}$$

stetig?

**Aufgabe 6:** Finden Sie eine Stammfunktion zu  $f(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$ ,  $x > 0$

**Aufgabe 7:** Die Gammafunktion ist definiert durch  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ . Zeigen Sie:  
 $\Gamma(n) = (n-1)!$ .