MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2010/2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 11

Aufgabe 1: Man zeige: Sei X ein normierter Vektorraum (z.B. $\mathbb{R}^n$). Dann gilt:

$$M \subset X \text{ ist abgeschlossen } \iff \partial M \subset M$$

Aufgabe 2: Man zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

stetig differenzierbar ist und man skizziere den Graphen. (Die Funktion ist unendlich oft differenzierbar, wie man sich leicht überlegt, wenn man die einmalige Differenzierbarkeit verstanden hat.)

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

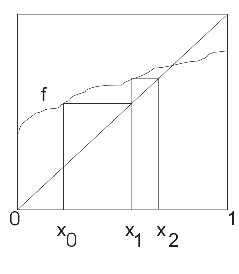
überall differenzierbar ist, aber die Ableitungsfunktion unstetig ist.

Aufgabe 4: Man bestimme

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} n \tan \frac{1}{n}\,.$$

Aufgabe 5: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: Wenn $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existiert und $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ existiert, dann ist $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

Aufgabe 6: Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig und $f :]0,1[\to [0,1]$ differenzierbar und es gebe $K < 1$ mit $\sup_{x \in]0,1[} |f'(x)| \leq K$. Sei $x_0 \in [0,1]$ beliebig und für alle $n \geq 0$ setze $x_{n+1} := f(x_n)$. Betrachten Sie die Iteration an der Skizze:



Zeigen Sie, daß die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ konvergiert. Wogegen konvergiert die Folge?
Hinweis: Betrachten Sie $x_{n+1} - x_n$, benutzen Sie den Mittelwertsatz.

Aufgabe 7: Aus einem Baumstamm, der einen durchgängig gleich großen kreisförmigen Querschnitt hat, soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von möglichst großer Tragfähigkeit herausgeschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zur Balkenbreite und zum Quadrat der Balkendicke. In welchem Verhältnis müssen Dicke und Breite des Balkens zueinander stehen?