

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 1

Aufgabe 1: Seien X, Y und A, B jeweils kommensurable Größen. Zeigen Sie $X : Y = A : B$ genau dann, wenn

(2) für alle positiven ganzen Zahlen m, n gilt:

Wenn $mX > nY$ dann auch $mA > nB$ und wenn $mX = nY$ dann auch $mA = nB$ und wenn $mX < nY$ dann auch $mA < nB$. Kurz: Falls $mX \gtreqqless nY$ dann auch $mA \gtreqqless nB$

Aufgabe 2: Zeigen Sie für Strecken mit dem Strahlensatz: Wenn $a : b = A : B$ dann auch $a + b : b = A + B : B$.

Aufgabe 3: (2) aus Aufgabe 1 ist Euklids Definition der Proportion. In der Vorlesung wurde damit gezeigt: Seien X, Y, A, B gleichartige Größen, also Strecken, Flächen usw.. Es gelte $X : Y = A : B = c : d$. Dann ist auch

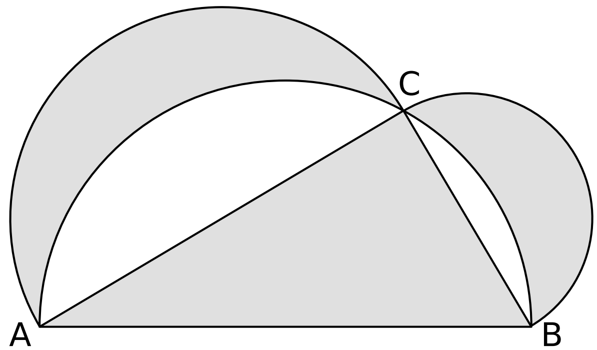
(1) $$X + A : Y + B = c : d$$

Zeigen Sie nun diese Aussage für Strecken mit dem Strahlensatz. Sie können die Gültigkeit der Kongruenzsätze für Dreiecke voraussetzen.

Aufgabe 4: Seien X, Y, ϵ Strecken und es gelte $X : Y = A : B$. Zeigen Sie: Für jedes beliebig kleine $\epsilon \neq 0$ gilt: $X + \epsilon : Y \neq A : B$.
Dazu zeigen Sie
(i) Mit Hilfe des Strahlensatzes: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein Maß $e \leq \epsilon$ und eine positive ganze Zahl n so dass $Y = ne$.
(ii) Es gibt eine Strecke Z die zu Y kommensurabel ist und für die $X \leq Z < X + \epsilon$ gilt.
(iii) Benutzen Sie (2) aus Aufgabe 1, um die Aussage zu beweisen.

Überlegen Sie sich, an welchen Stellen Sie auf das Archimedische Axiom zurückgreifen.
Bemerkung: Für allgemeine Größen gilt die Aussage ebenfalls, allerdings muss man im Beweis auf den Euklidischen Algorithmus zurückgreifen.

Aufgabe 5:



Errichten Sie über der Strecken $\overline{AB}$ den Thales Kreis. Wählen Sie ein beliebiges Punkt C auf den Kreis und errichten Sie über den Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ Thales Kreise. Die entstehenden Flächen zwischen den Thales Kreisen sind die Monde des Hippokrates. Zeigen Sie: die Fläche der Monde ist gleich der Dreiecksfläche.