MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 13

Aufgabe 1: Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\boldsymbol{x},t) = D\Delta p(\boldsymbol{x},t), \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ D > 0$$

mit Hilfe der Fouriertransformation bzgl. $\boldsymbol{x}$ für die Anfangsbedingung

$$p(\boldsymbol{x},0) = \rho(\boldsymbol{x}) \in L_1(\mathbb{R}^3)\ ,$$

d.h. leiten Sie die Lösung

$$p(\boldsymbol{x},t) = (4\pi Dt)^{-3/2} \int e^{\frac{-|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4Dt}} \rho(\boldsymbol{y}) d^3y$$

her.
Berechnen Sie die Lösung explizit für $\rho(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{x}^2}$.
Bemerkung: Wählt man $D = \frac{i\hbar}{2m}$ wird aus der Wärmeleitungsgleichung die freie Schrödingergleichung (Potential gleich Null). Somit haben Sie soeben auch die allgemeine Lösung der freien Schrödingergleichung bestimmt, die durch das Auftauchen von i allerdings ein vollkommen anderes Verhalten als die der Wärmeleitungsgleichung zeigt.

Aufgabe 2:

a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$(1-x^2)y'' - 2xy' = -n(n+1)y,$$

die sogenannte Legendresche Differentialgleichung ($y = f(x)$). Bestimmen Sie die ersten drei ($n = 0,1,2$) Polynomlösungen P_n durch Polynomansatz (vergleichen Sie ihr Ergebnis mit Analysis II, Blatt 8, Aufgabe 2b)).
Hinweis: Polynomansatz bedeutet, dass als Lösung ein beliebiges Polynom endlicher Ordnung angesetzt und durch Einsetzen und Rechnung bestimmt wird.

b) Folgern Sie aus (a), dass die P_n ein Orthonormalsystem bilden, d.h. daß mit dem durch $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\lambda(dx)\ \ \forall f,g, \in L^2([-1,1])$ definiertem Skalarprodukt gilt:

$$\langle P_n, P_m\rangle = 0 \qquad (\forall m,n \in \mathbb{N}, \quad n \neq m)$$

gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f,g : [-1,1] \to \mathbb{R}$

$$\langle f, Ag\rangle = \langle Af, g\rangle$$

gilt. Hierbei bezeichnet A den durch $Af(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)$ definierten Differentialoperator.

Aufgabe 3: Zeigen Sie: Unter der Fouriertransformation verwandelt sich die Faltung in das gewöhnliche Produkt, d.h. es gilt:

$$\widehat{f \star g} = \sqrt{2\pi}\,\widehat{f}\widehat{g}\ ,$$

für alle $f, g \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ mit Werten in $\mathbb{C}$.

Aufgabe 4: Es sei auf $L^2([-\pi,\pi])$ das Skalarprodukt durch $\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\lambda(dx)$ gegeben. Dann bilden die Funktionen $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_0(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f_{2n}(x) := \cos(nx)$ und $f_{2n-1}(x) := \sin(nx)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([-\pi,\pi])$.

a) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(x) := |\sin x|$.

b) Leiten Sie mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung und (a) die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

her.

c) Zeigen Sie, daß die Fourierreihe gleichmässig gegen die Funktion f konvergiert.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php