MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 12

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass $C[a,b]$, der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, vollständig bezüglich der Supremumsnorm $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$ ist.
Hinweis: Was müssen Sie zum Beweis der Vollständigkeit eines Raumes bezüglich einer gegebenen Norm zeigen? Denken Sie für den letzten Schritt an das $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument.

Aufgabe 2: Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der komplexen oder reellen Zahlen. Beweisen Sie, dass $l^2 := \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty,\ x_k \in \mathbb{K},\ k \in \mathbb{N}\}$ mit der Norm
$\|x\|_2 := (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ vollständig ist.

Aufgabe 3: Die Hermiteschen Funktionen $\Psi_n(x) = C_n e^{-\frac{1}{2}x^2} H_n(x)$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$, dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen, mit dem Skalarprodukt $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\lambda(dx)$. Dabei sind $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ die Hermiteschen Polynome. Berechnen Sie für $n = 0, 1, 2$ die Polynome $H_n(x)$ sowie die Normalisierungskonstanten C_n. Überzeugen Sie sich von der Orthogonalität der Ψ_n. Bezüglich welches Skalarprodukts sind die H_n orthogonal?
Hinweis: Benutzen Sie bei der Berechnung der Normierung

$$\int x^2 e^{-x^2}\lambda(dx) = -\frac{d}{dy}\int e^{(-yx^2)}\lambda(dx)\Big|_{y=1}$$

und analoges für $\int x^4 e^{-x^2}\lambda(dx)$.
Bemerkung: Die Hermiteschen Funktionen sind die quantenmechanischen Eigenzustände des harmonischen Oszillators.

Aufgabe 4: Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Betrachten Sie die Faltung F_λ der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$ mit der Familie der glättenden Funktionen (Mollifier)

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{N}\lambda e^{-\frac{1}{1-\lambda^2x^2}} \cdot \mathbb{1}_{[-\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda}]}(x)\ ,\ N = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}}dx,$$

also $F_\lambda(x) = (\mathbb{1}_{[a,b]} * f_\lambda)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(y) f_\lambda(x-y)dy$. Zeigen Sie, dass F_λ für $\lambda \to \infty$ in L^1 gegen $\mathbb{1}_{[a,b]}$ konvergiert.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php