Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 11

Aufgabe 1: Für $p \geq 1$ heißt

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \;\; x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Die $p-$Norm auf $\mathbb{R}^n$. Die Dreiecksungleichung für die $p-$Norm läßt sich mit Hilfe der Hölderungleichung beweisen. Diese lautet für $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \; p \geq 1$$

Bemerkung: für $p = 2$ ist dies die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

a) Beweisen Sie die Hölderungleichung:
Überlegen Sie sich zunächst den Fall $p = 1$.
Zeigen Sie dann die Hölderungleichung für $p > 1$ (also $q < \infty$).

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Überlegen Sie sich, dass es ausreicht

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq 1 \text{ für } \|x\|_p = \|y\|_q = 1 \tag{1}$$

zu zeigen.

(ii) Um (1) zu erhalten, benutzen Sie

$$\text{für } a, b > 0 \text{ gilt } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{2}$$

(iii) Beweisen Sie nun noch (2). Gehen Sie dazu folgendermaßen vor: Gegeben sei ein Rechteck mit den Seiten a, b. Es gilt

$$\frac{a^p}{p} = \int_0^a x^{p-1} dx \text{ und } \frac{b^q}{q} = \int_0^b y^{q-1} dy$$

Zeichnen Sie den Graphen von $y = x^{p-1}$ und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $x = y^{\frac{1}{p-1}}$ unter Beachtung von $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Überzeugen Sie sich, dass auf Grund der Konvexität die Rechtecksfläche $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

(iv) Was passiert für $p < 1$?

b) Zeigen Sie die Dreiecksungleichung für die $p-$Norm für $p \geq 1$.

Hinweis:
Wie geht p=1? Weiter gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^{n} \Big[(|x_i + y_i|)^{p-1} (|x_i| + |y_i|) \Big].$$

Benutzen Sie unter Beachtung von $(p-1)q = p$ die Hölderungleichung.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php