MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 10

Aufgabe 1: Es sei $x \in [0,1]$, $r_i : [0,1] \to \{0,1\}$, $r_i(x) \in \{0,1\}$ die i-te Rademacher-Funktion (die Funktion, die die i-te Stelle der Dualentwicklung von x angibt) und $\rho_n(x) := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i(x)$. Zeigen Sie, dass $\forall \varepsilon > 0$

$$\lambda(\{x||\rho_n(x) - \frac{1}{2}| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \quad .$$

Hinweis: Folgen Sie dem Beweis der Vorlesung und führen Sie alle Schritte sorgfältig aus. Überlegen Sie sich zudem, in wieweit diese Aussage den Zufall in einem physikalischen Münzwurf Experiment erklären kann, ohne dass Sie bereits auf der Bildebene modellieren.

Aufgabe 2: Durch Verbesserung der Abschätzungen in Aufgabe 1 folgt noch eine stärkere Aussage, nämlich

$$\rho_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \text{ fast überall auf } [0,1] \; .$$

Man kann hier die Binärdarstellung durch jede p-adische Darstellung ersetzen und erhält die analoge Aussage für $\rho_n^{(p)}(x)$ mit $\frac{1}{2}$ ersetzt durch $\frac{1}{p}$.

Man folgere nun daraus, dass fast alle Zahlen Normalzahlen sind, d.h. die Menge aller Zahlen, die in jeder p-adischen Entwicklung die gemäßen relativen Häufigkeiten zeigen, hat Lebesguemaß 1.

Hinweis: Man betrachte das Komplement der Menge $G_p = \{x|\rho_n^p(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{p}\}$

Aufgabe 3: Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \ldots \int_0^1 f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) dx_1 \ldots dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right) \; .$$

Hinweis: Imitieren Sie Chebyshevs (Tschebyschows) Trick (vgl. Vorlesung) und zeigen Sie, daß das n-dimensionale Volumen der Menge, die durch

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{2}\right| > \epsilon, \;\; 0 \leq x_i \leq 1$$

definiert ist, kleiner ist als $1/(12n\varepsilon^2)$.

Aufgabe 4: Beweisen Sie: Für alle $f \in \mathcal{L}([a,b])$, $b > a$ gilt:

$$\int_a^b \mid f(x) \mid \lambda(dx) = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ fast überall auf } [a,b] \ .$$

Aufgabe 5: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integriebarer Funktionen, die im Limes $n \to \infty$ auf dem offenen Intervall $(0,1)$ punktweise gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion f konvergieren. Widerlegen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\lambda(dx) = \int_0^1 f(x)\lambda(dx) \ .$$

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php