MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 8

Aufgabe 1:

(a) Sei f meromorph auf $\mathbb{C}$ mit endlich vielen Polen $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Weiter sei $g(z) := \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$, für alle $z \in \mathbb{C}$, für die dieser Ausdruck wohl definiert ist. Zeigen Sie

$$\sum_{l=1}^{n} \operatorname{res}(f, z_l) = \operatorname{res}(g, 0)\,.$$

(b) Bestimmen Sie

$$\oint_{\partial K_2(0)} \frac{z^{16}}{z^{17} - z^4 + 1} dz\,.$$

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Gaußfunktion, also

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{ikx} dx\,.$$

Achten Sie auf korrekte Argumentation.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nur einfache Pole $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$ hat. Dann nennt man

$$P \int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_a^{x_1 - \epsilon} f(y)dy + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(y)dy + \ldots + \int_{x_n+\epsilon}^{b} f(y)dy \right)$$

den *Hauptwert* des Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe endlich viele Pole (erster Ordnung) $(x_l)_{l \in I}$ auf der reellen Achse. Betrachten Sie einen Weg von $-R$ bis R entlang der reellen Achse, wobei jeder Pol x_l mit einem Halbkreis $\overset{\frown}{x_l}$ in der oberen komplexen Halbebene umgangen wird. Schließen Sie den Weg durch einen Halbkreis vom Radius R in der oberen Halbebene. Die (endlich vielen) Pole von f in der oberen Halbebene seien $(z_j)_{j \in J}$ Zeigen Sie: Wenn das Integral über f über den Halbkreis im Limes $R \to \infty$ veschwindet, dann gilt

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{l \in J} \operatorname{res}(f, z_l) + i\pi \sum_{n \in I} \operatorname{res}(f, x_n)\,.$$

(b) Der zu $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{(\partial t)^2}$ inverse Operator ist ebenfalls durch einen Integraloperator mit Integralkern $G(s,t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ gegeben. Wie beim verwandten Beispiel in der Vorlesung besteht die Rechnung in einer Fouriertransformation (diesmal in Raum und Zeit) und führt geradewegs zu

$$G(u,v) = \frac{1}{4\pi^2 iv}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \left(e^{i\omega u} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2})} e^{ikv} dk \right)$$

wobei $u = t - s$ und $v = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$. Man berechne G und benutze beim inneren Integral Aufgabe a). Beim äußeren Integral benutze man $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\mathrm{d}k = 2\pi\delta(x)$.

Die Wellengleichung des Elektromagnetismus lautet $\Box A(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{j}(t,\boldsymbol{x})$, wobei $\boldsymbol{j}$ einen Strom darstellt. Diesen kann man sich durch eine zeitartige Bahn im Raum-Zeit Diagramm repräsentiert denken. Man stelle im Diagramm dar von welchen Bahnpunkten dann $A(t,\boldsymbol{y})$ bestimmt wird.

Aufgabe 4: Basteln Sie sich geeignete Riemannsche Blätter (verklebte Blätter) zu $\frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$, um auf einem Blatt das Integral

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

zu berechnen.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php