MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 7

Aufgabe 1: Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Laurentreihen und bestimmen Sie die Residuen.

(a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$

(b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$

(c) $f(z) = \frac{\exp(z)-1}{z}$

Aufgabe 2: Sei $\alpha \geq 1$. Geben Sie den größten offenen Kreisring an, auf dem die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+z)^n}{\alpha^n+1}$ konvergiert.

Aufgabe 3: Entwickeln Sie $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ in folgende Laurentreihen:

(a) Um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(0,1)}(0)$;

(b) Um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(1,2)}(0)$;

(c) Um $z_0 = 1$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(3,\infty)}(1)$.

Aufgabe 4:

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Hinweis: Was für eine Singularität ist $z = 0$? Verformen Sie den Integrationsweg zu einem, der die Null durch einen kleinen Halbkreis in der oberen Halbebene ausspart ($\rightarrow\curvearrowright\rightarrow$) und ersetzen Sie $\sin x$ mit Hilfe der Eulerformel. Berechnen Sie die beiden entstehenden Integrale jeweils durch geschicktes Schließen des Integrationswegs mit einem „unendlich großen“ Halbkreis. Achten Sie auf eine korrekte Argumentation, dass diese Halbkreise keinen Beitrag liefern.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx \, .$$

Achten Sie auf saubere Argumentation.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php