MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 4

Aufgabe 1:

Sei $\boldsymbol{j} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $(t, \vec{x}) \mapsto \boldsymbol{j}(t, \vec{x})$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, das einen Strom mit den Komponenten $\boldsymbol{j} = (j^0, \vec{j}) = (\rho, \rho\vec{v})$ repräsentiert. Hierbei ist $\vec{v} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ das Geschwindigkeitsfeld, entlang dem die Massen- (oder Wahrscheinlichkeits-) Dichte $\rho : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ propagiert.

(a) Sei F eine 3-dimensionale Hyperfläche und $\underline{\Phi} : G \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ eine Parametrisierung von F. Dann ist mit dem gerichteten Flächenelement $d\underline{\Sigma}$

$$\int\limits_F \boldsymbol{j} \cdot d\underline{\Sigma} = \int\limits_G \det(\boldsymbol{j}, \partial_u \underline{\Phi}, \partial_v \underline{\Phi}, \partial_w \underline{\Phi}) dudvdw.$$

Zeigen Sie:
(i) Wird $\boldsymbol{j}$ gegen eine $(t = t_0)$-Hyperfläche (z.B. $t = t_0,\ |x_k| \leq 1,\ ,k = 1, 2, 3$) integriert, ergibt dies das Volumenintegral über die Nullkomponente $j^0 = \rho$ von $\boldsymbol{j}$.
(ii) Wird $\boldsymbol{j}$ gegen ein Zeitintervall $\times$ 2-dimensionale Raumfläche (z.B. $0 \leq t \leq T,\ x_1 = a,\ x_2^2 + x_3^2 \leq 1$) integriert, erhält man $\boldsymbol{j} \cdot d\underline{\Sigma} = \det(\vec{j}, \partial_u \vec{\phi}, \partial_v \vec{\phi}) dudvdt$, wobei $\vec{\phi}(u, v)$ eine Parametrisierung der 2-dimensionalen Raumfläche ist.

(b) In der Quantenmechanik wird ein Teilchen durch eine Wellenfunktion $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ beschrieben, die der *Schrödingergleichung* (alle Dimensionskonstanten ignoriert)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \triangle \psi(\vec{x}, t) + V(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t)$$

genügt. Hierbei ist V eine reelle Funktion. Sei ψ^* zu ψ komplex konjugiert. Man zeige: $\boldsymbol{j} = (\psi^* \psi, \mathrm{Im}(\psi^* \nabla \psi))$ ist divergenzfrei, d.h. $\boldsymbol{j}$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung $div \boldsymbol{j} = \sum_{\alpha=0}^{3} \partial_\alpha J^\alpha = 0$.
Hinweis: Man schreibe die Schrödingergleichung für ψ^*, berechne die Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi)$ und erkenne darin die Dreier-Divergenz von $\mathrm{Im}(\psi^* \nabla \psi)$.

(c) Betrachten Sie eine beschränkte, glatt umrandete $(t = t_0)$-Fläche F_0 und bewegen Sie diese unter dem $\boldsymbol{j}$-Transport zu einer $(t = t_1)$-Fläche F_1. Fertigen Sie hierzu eine Skizze an.

Sei $j^0 = \rho : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_+$. Betrachten Sie den „Stromlinien-Zylinder“ V mit Boden

F_0 und Deckel F_1. Berechnen Sie $\int_{\partial V} \boldsymbol{j} \cdot d\underline{\sigma}$. (Achten Sie auf genaue Argumentation und Orientierung.)
Nun gilt die Kontinuitätsgleichung $div\boldsymbol{j} = 0$ aus Teil (b). Was ergibt sich?

Das Resultat erlaubt die Interpretation von j^0 als Wahrscheinlichkeitsdichte. Für allgemeine Flächen ist $\int_F \boldsymbol{j} \cdot d\underline{\sigma}$ der Erwartungswert der Anzahl von (signierten, d.h. mit Vorzeichen je nach Richtung) Durchstoßungen von Stromlinien durch F. Wenn jede Stromlinie die Fläche nur einmal durchkreuzt ist dies gleich der Durchkreuzungswahrscheinlichkeit. Überlegen Sie sich, was das physikalisch bedeutet.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php