MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 3

Aufgabe 1: Die Länge einer Kurve K ist definierbar als

$$L(K) = \int_I \sqrt{|\mathbf{\Phi}'(t)|^2} dt \,,$$

wobei $\mathbf{\Phi} : I \subset \mathbb{R} \to K$ ein die Kurve einfach durchlaufender Weg ist.
Sei $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - \frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}}$.

(a) Man berechne die Länge des Graphen von f.

(b) Finden Sie nun $s : [0,1] \to [0, L(K)]$ so, dass $\boldsymbol{\lambda}(q) = \mathbf{\Phi} \circ s^{-1}(q)$, mit $\mathbf{\Phi}$ wie in Teil (a), die Parametrisierung ist, die die Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchläuft. (Analog der Eigenzeit in der relativistischen Physik.)

Aufgabe 2: Seien ϕ, θ die üblichen Koordinaten auf der Sphäre. Berechnen Sie explizit das Wegintegral eines Vektorfelds $\boldsymbol{f}$ über den Weg γ

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s},$$

indem Sie eine detaillierte Parametrisierung der Wege angeben und veranschaulichen Sie sich jeweils deren Verlauf:

(a) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z^2 \end{pmatrix}$ über den Weg γ_1 entlang des Längenkreises bei $\phi = \frac{\pi}{2}$ vom Nord- zum Südpol der Einheitsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sowie entlang eines Weges γ_2 auf der Einheitssphäre, für den in Kugelkoordinaten gilt $\phi = \theta \in [0, \pi]$.

(b) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ x+y \end{pmatrix}$ entlang der Wege γ_1 und γ_2 aus Teil a).

(c) Hätten Sie diese Ergebnisse auch ohne explizite Berechnung des Wegintegrals erhalten können?

Aufgabe 3: Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \;,\; \boldsymbol{u}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \boldsymbol{0} & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Integrieren Sie $\boldsymbol{u}$ über den Rand des Kreises mit Radius R im positiven Umlaufsinn durch explizite Berechnung von

$$\oint_{S^1(R)} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}$$

sowie durch Anwendung des Satzes von Stokes.

Aufgabe 4: Es sei $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\hat{e}_r + r\cos\theta\hat{e}_\theta$ in gewöhnlichen Kugelkoordinaten des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ über $S^2(R)$, die 2-Sphäre mit Radius $R > 0$, durch explizite Berechnung von

$$\int_{S^2(R)} \boldsymbol{f} \cdot d\Sigma$$

und unter Verwendung des Gaußschen Satzes.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php