Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 2

Aufgabe 1:

(a) Berechnen Sie das 1-dimensionale Gaußintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

für $\alpha > 0$.

(b) Sei $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ symmetrisch und positiv definit (d.h. alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A sind positiv). Es bezeichne $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Weiter sei $\boldsymbol{x}^T = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\boldsymbol{y}^T D \boldsymbol{y}} d^n\boldsymbol{y} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\ .$$

(c) Berechnen Sie nun die zur obigen Gaußverteilung gehörende Kovarianzmatrix. Die Einträge der Kovarianzmatrix sind definiert als

$$C_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j e^{-\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}} d^n\boldsymbol{x}.$$

Stellen Sie eine Verbindung zwischen der Matrix A und der Kovarianzmatrix her. Hinweis: Erinnern Sie sich an die Formel zur Bestimmung des Inversen einer Matrix über die Entwicklung von Determinanten.

Aufgabe 2: Für $p \geq 1$ betrachte man die p-Norm auf $\mathbb{R}^2$. Es sei $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

(a) Zeichnen Sie für $p = 1, 2, \infty$ jeweils den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$, d.h. die Menge $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\|_p = 1\}$.

(b) Zeigen Sie: $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \lim\limits_{p\to\infty} \|\boldsymbol{x}\|_p$.

(c) Deuten Sie die Dreiecksungleichung der p-Norm graphisch: Zeigen Sie zunächst graphisch für $p = 1/2$, dass $\|\cdot\|_p$ die Dreiecksungleichung verletzt. Zeigen Sie letzteres anschließend analytisch für allgemeines $0 < p < 1$.

Aufgabe 3: Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem Vektorraum V heißen äquivalent, wenn es positive Konstanten c_1, c_2 gibt mit

$$c_1\|\boldsymbol{x}\|_b \leq \|\boldsymbol{x}\|_a \leq c_2\|\boldsymbol{x}\|_b \text{ für alle } \boldsymbol{x} \in V \ .$$

Zeigen Sie: Alle p-Normen auf $\mathbb{R}^n$ $(p \geq 1,\ n \in \mathbb{N})$ sind äquivalent. Dies beinhaltet auch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.
Hinweis: Beginnen Sie mit dem Beweis der Äquivalenz von $\|\cdot\|_\infty$ und einer beliebigen anderen p-Norm.

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php