MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2013/14

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 1

Aufgabe 1: Seien $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ und $f : V \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^5 - 16y^5$. Bestimmen Sie die stationären Punkte von f, sowie die zugehörigen Funktionswerte.

Aufgabe 2:

$$W_N := \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!}$$

ist die Anzahl der Aufteilungen von N Teilchen auf m Kästen, wenn $\sum_{j=1}^{m} N_j = N$ gilt. Wenn den Kästen jeweils die Energie E_j zukommt, dann ist $\overline{E} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{m} E_j N_j$ die mittlere Energie pro Teilchen.

Zeigen Sie, dass am Maximum von W_N, unter den Nebenbedingungen $\sum_{j=1}^{m} N_j = N$ und $\sum_{j=1}^{m} E_j N_j = E$,

$$N_j = Ce^{-\lambda E_j} \tag{1}$$

gilt. Hierbei sind C und λ Konstanten, die durch die Nebenbedingungen bestimmt werden.

Hinweise: Da $N \gg m$ darf man annehmen, dass $N_j \gg 1$ für alle $j = 1, \dots, m$ und kann näherungsweise die Stirlingformel $N_j! \approx \left(\frac{N_j}{e}\right)^{N_j}$ verwenden. Dadurch können die N_j als kontinuierliche Variablen behandelt werden.

Minimieren Sie $\ln W_N$ statt W_N.

Bemerkung: Der Parameter λ in Formel (1) erhält durch den Zusammenhang mit der Thermodynamik eine physikalische Bedeutung. Dort ist $\lambda = \frac{1}{kT}$, mit der Boltzmannkonstante k und der Temperatur T .

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \to f(x, y) := e^5 + \frac{1}{10}(x^2 + y^2 - 35)e^{-x}$$

und ermitteln Sie, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe 4: Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren: Unter allen Vierecken mit den gegebenen Seiten a, b, c, d hat das Sehnenviereck die größte Fläche.

Hinweis: Betrachten Sie die beiden Dreiecke mit den Seiten a, b und Zwischenwinkel α bzw. c, d und Zwischenwinkel β. Welche Nebenbedinung müssen α und β erfüllen, damit die beiden Dreiecke ein Viereck bilden? Maximieren Sie die gemeinsame Fläche der beiden Dreiecke unter der gefundenen Nebenbedingung.
Warum ist das gefundene Maximum ein Sehnenviereck (siehe Faßkreisbogen!)?

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe, zu der Sie angemeldet sind, ab.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/∼bohmmech/Teaching/MP3WiSe2013/index.php