Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 4

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass jede auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| < |z^\alpha|$ mit $\alpha < 1$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ konstant ist.

Hinweis: Schätzen Sie $|f(z) - f(0)|$ für ein beliebiges $z \neq 0$ mithilfe der Integralformel von Cauchy für einen beliebig großen Kreis um 0 (der z enthält) ab.

Aufgabe 2: Berechnen Sie folgende Integrale mithilfe der Integralformel von Cauchy ($z \in \mathbb{C}$):

(a)
$$\int_{|z-2|=5} \frac{\sin(z)}{z-2} dz$$

(b)
$$\int_{\partial B_2(0)} \frac{\sin(z)}{z+i} dz$$

(c)
$$\int_{\partial B_3(-2i)} \frac{dz}{z^2+\pi^2}$$

Dabei bezeichnet $\partial B_r(z_0)$ den Rand des Kreises mit Radius r um z_0 mit positivem Umlaufssinn.

Hinweis: Begründen Sie zunächst, warum Sie die Integralformel von Cauchy anwenden dürfen!

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Stammfunktionen von folgenden Funktionen:

(a)
$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad f(z) = e^{az} \quad \text{mit } a \in \mathbb{C}$$

(b)
$$f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C} \qquad f(z) = \frac{1}{z}$$

Warum ist es nicht möglich, eine eindeutige Stammfunktion auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ von $\frac{1}{z}$ zu definieren?

Aufgabe 4: Zeigen Sie den Gaußschen Mittelwertsatz: Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für alle $r \geq 0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\phi}) d\phi \,.$$

Abgabe: Montag, 20.11.2017 , 10 Uhr.