MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2017/18

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 2

Aufgabe 1: Seien ϕ, θ die üblichen Koordinaten auf der Sphäre. Berechnen Sie explizit das Wegintegral eines Vektorfelds $\boldsymbol{f}$ über den Weg γ

$$\int_\gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{s},$$

indem Sie eine detaillierte Parametrisierung der Wege angeben und veranschaulichen Sie sich jeweils deren Verlauf:

(a) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_1(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 3z^2 \end{pmatrix}$ über den Weg γ_1 entlang des Längenkreises bei $\phi = \frac{\pi}{2}$ vom Nord- zum Südpol der Einheitsphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, sowie entlang eines Weges γ_2 auf der Einheitssphäre, für den in Kugelkoordinaten gilt $\phi = \theta \in [0, \pi]$.

(b) für das Vektorfeld $\boldsymbol{f}_2(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ -z \\ x+y \end{pmatrix}$ entlang der Wege γ_1 und γ_2 aus Teil a).

(c) Hätten Sie diese Ergebnisse (qualitativ) auch ohne explizite Berechnung des Wegintegrals erwarten können?

Aufgabe 2: Sei $f : [0,a] \to \mathbb{R},\ a > 0$ einmal stetig differenzierbar und positiv. Skizzieren Sie den Körper, der durch die Rotation von graph(f) um die x-Achse entsteht. Verifizieren Sie den zweiten Satz von Pappus, nämlich dass der Inhalt der Manteloberfläche MF dieses Körpers durch

$$|\mathrm{MF}| = 2\pi r_s \, L(K)$$

gegeben ist. Hierbei ist $L(K)$ die Länge und $r_s = \frac{1}{L(K)} \int_{\mathrm{graph}(f)} f ds$ der Schwerpunktsradius von graph(f). Geben Sie dazu jeweils eine Parametrisierung von MF und graph(f) an. Zeichnen Sie r_s in Ihrer Skizze ein.

Aufgabe 3: Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$. Integrieren Sie $\boldsymbol{u}$ über den Rand des Kreises mit Radius R im positiven Umlaufsinn durch explizite Berechnung von

$$\oint_{S^1(R)} \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{s}$$

sowie durch Anwendung des Satzes von Stokes.

Aufgabe 4: Es sei $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{f}(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\hat{e}_r + r\cos\theta\hat{e}_\theta$ in gewöhnlichen Kugelkoordinaten des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{f}$ über $S^2(R)$, die 2-Sphäre mit Radius $R > 0$, erst durch explizite Berechnung von

$$\int_{S^2(R)} \boldsymbol{f} \cdot d\Sigma$$

und dann unter Verwendung des Gaußschen Satzes.