MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2017/18

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 13 (Probeklausur)

Keine Abgabe! Dieses Blatt wird nicht mehr korrigiert, aber in den Tutorien der letzten Vorlesungswoche besprochen. Diese Probeklausur soll Ihnen eine Möglichkeit zur Wiederholung wichtiger Themen bieten und hat eine gewisse Ähnlichkeit zur echten Klausur, aber sie ist nur eine Orientierungshilfe ohne Gewähr!
Denken Sie daran, genau wie in der Klausur alle Zwischenschritte zu begründen und wichtige Sätze, die Sie benutzen, zu nennen! Rechnungen ohne Begründungen oder nicht vollständig nachvollziehbare Argumentationen werden mit starkem Punktabzug belegt.

Aufgabe 1: Gegeben sei das Vektorfeld $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} -xy \\ \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix}$. Integrieren Sie $\mathbf{u}$ über den Rand des Kreises mit Radius R

(a) durch explizite Berechnung von $\oint_{S^1(R)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$,

(b) durch Anwendung des Satzes von Stokes!

Aufgabe 2:

(a) Ist die Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $h(z) = i \cdot \mathrm{Im}(z)^2$ holomorph? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(b) Es sei $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f_1(x,y) = x^3 - 3xy^2$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(x+iy) = f_1(x,y) + if_2(x,y)$ holomorph ist!

(c) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ sowie Lage und Art der Singularitäten der Funktion g gegeben durch

$$g(z) = \frac{z+2}{z^2-i} e^{\frac{1}{z+2}}.$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie folgende Integrale!

(a)

$$\int_{\partial B_2(i)} \frac{\sin(z)}{(z-2i)^2(z-3)}$$

Dabei bezeichnet $\partial B_r(z)$ den Rand des Kreises um z mit Radius r.

(b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{1+x^2} dx$$

Benutzen Sie für dieses Integral den Residuensatz und achten Sie auf genaue Begründungen!

Aufgabe 4:

(a) Es sei $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$ und eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ der Potenzmenge von Ω definiert durch
$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow a \in M.$$
Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra? Beweisen Sie Ihre Antwort!

(b) Es sei nun $\mathcal{A}' \subset \mathcal{P}(\Omega)$ definiert durch
$$M \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow M \subset \{a, b, c\} \text{ oder } \{d, e, f\} \subset M.$$
Beweisen Sie, dass $\mathcal{A}'$ eine σ-Algebra ist!

Aufgabe 5: Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei normalverteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte
$$\rho(x) = Ce^{-\lambda x^2}.$$
Hier ist $\lambda > 0$. Berechnen Sie (explizit!) den Wert der Konstanten C und die Varianz von X!