# M3 - Übung

## Blatt 1

**A1** a) $\int_{[0,\pi]^3} x^2 y \sin z \, dx\,dy\,dz = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^\pi \left[\frac{1}{2} y^2\right]_0^\pi \left[-\cos z\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\pi^5$

b) $\int_M x^2 z \, dx\,dy\,dz \overset{\text{Zylinder-Koord.}}{=} \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi \int_0^h z\,dz \overset{\text{P.I.}}{=} \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^r \left[\frac{\cos\varphi \sin\varphi + \varphi}{2}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^h$

$= \pi \frac{h^2}{8} r^4$

Alt.: $\int_M x^2 z \, dx\,dy\,dz = \int_0^h z\,dz \int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2 \, dx\,dy = \ldots$

Zur Jacobi-Det.:

$$f(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

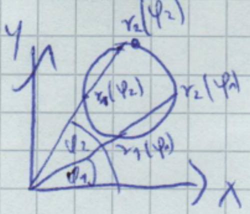
$$J_{r,\varphi,z} = (\partial_r f, \partial_\varphi f, \partial_z f) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\det J| = r$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Tx+t)\, d^n x \overset{y=Tx+t}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|\det T|} f(y)\, d^n y$$

**A2** $B \subset \mathbb{R}^2$ $\qquad \int_B f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr\,d\varphi$

$$g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad J_{r,\varphi}(g) = (\partial_r g, \partial_\varphi g) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$|\det J_{r,\varphi}| = r$




## A3

a) $$I^2 = \ldots = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \, \rho \, e^{-\alpha\rho^2} = \frac{\pi}{\alpha} \Rightarrow I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

b) $$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-x^T A x} \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(Sx)^T D S x} \, d^n x \overset{\text{Trafo } Sx = y}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-y^T D y} \underbrace{\frac{1}{|\det S|}}_{=1} d^n y$$

$A \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ $\quad x^T A x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ :=$ pos. def.

$\forall i \in I, \lambda_i \in Eig(A) \quad \lambda_i > 0$

symmetr. Matrize : $A = A^T$

Diagonalisierbarkeit : $A = S^T D S \qquad D = diag\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$

$|\det S| = 1 \qquad S$ orthog. $S^T = S^{-1}$

$y^T D y = \sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i$

$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det D$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n y_i^2 \lambda_i} = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}_i} e^{-\lambda_i y_i^2} dy_i = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\prod_{i=1}^n \lambda_i}} = \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}}$$

$$\det A = \det S^T D S = \det S^{-1} \det D \det S = (\det S)^{-1} \det D \det S = \det D$$

c) $$C_{ij} = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j e^{-\underline{x}^T A \underline{x}} \, d^n \underline{x}$$

$$x^T A x = \sum_{kl} x^T e_k e_l^T a_{kl} x = \sum_{k,l,r,s} x_r \underbrace{e_r^T e_k}_{\delta_{rk}} e_l^T a_{kl} e_s x_s = \sum_{kl} x_k x_l a_{kl}$$

$$\Rightarrow C_{ij} = \ldots = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, e^{-\sum_{kl} x_k x_l a_{kl}} \, d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{d}{da_{ij}} e^{-\sum_{kl}} \, d^n x$$

$$\overset{?}{=} -\frac{d}{da_{ij}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{kl} x_k x_l a_{kl}} \, d^n x = -\frac{d}{da_{ij}} \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}^3} \frac{d}{da_{ij}} \det A$$

$$\frac{d}{da_{ij}} \det A = \underset{\substack{\uparrow \\ i,k \in E_n}}{\frac{d}{da_{ij}}} \sum (-1)^{i+l} a_{il} \det A'_{il} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij} \overset{①}{=} \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{d}{da_{ij}} \det A = \det A \cdot A^{-1}_{ij}$$

① $\boxed{A^{-1}_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det A} \det A'_{ji} \boxed{\neq A^{-1}_{ji}}}$

$$A^{-1} = (S^T D S)^{-1} = S^{-1} D^{-1} S$$

$$(A^{-1})^T = A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1}_{ij} = A^{-1}_{ji}$$

$$\Rightarrow C_{ij} = \ldots = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, e^{-x^T A x} \, d^n x = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi^n}}{\sqrt{\det A}} A^{-1}_{ij} =$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\det A}} A^{-1}$$

A4 a)

$$L(K) = \int_I \| \Phi'(t) \|_2 \, dt \quad , \quad \Phi : I \to K \quad , \quad \Phi(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ (1 - \frac{2}{3} t)^{3/2} \end{pmatrix}$$

$$L(K) = \int_I \sqrt{1^2 + \left(-(1 - \tfrac{2}{3} t)^{1/2}\right)^2} \, dt = \int_0^1 (2 - \tfrac{2}{3} t)^{1/2} \, dt = -\frac{2}{3} \frac{3}{2} (2 - \tfrac{2}{3} t)^{3/2} \Big|_0^1$$

$$= -\left(\frac{4}{3}\right)^{3/2} + 2^{3/2}$$

b) $s : \underset{\ni t}{[0, 1]} \to \underset{\ni q}{[0, L(K)]}$ $\qquad t \xrightarrow{s} q \qquad q \xrightarrow{s^{-1}} t$

$$\lambda(q) = \Phi \circ s^{-1}(q) = \Phi(s^{-1}(q))$$

Ges.: $s(t)$

$$1 \overset{!}{=} \left| \frac{\partial \lambda(q)}{\partial q} \right|^2 =: \left| \frac{\partial \Phi(s^{-1})}{\partial s^{-1}} \right|^2 \left( \frac{\partial s^{-1}(q)}{\partial q} \right)^2$$

$s(t) = q \qquad dq = \frac{ds(t)}{dt}\,dt$ Kettenregel

⊛ $$\frac{\partial s^{-1}(q)}{\partial q} = \frac{\partial s^{-1}(q)}{\partial q}\cdot\frac{\partial q(t)}{\partial t}\left(\frac{\partial q(t)}{\partial t}\right)^{-1} = \frac{ds^{-1}(q(t))}{dt}\left(\frac{\partial q(t)}{\partial t}\right)^{-1}$$

$$1 = \left|\frac{d\lambda(q)}{dq}\right|^2 \overset{⊛}{=} \left(\frac{ds^{-1}(q(t))}{dt}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2}\cdot\left|\frac{d\Phi(s^{-1}(q))}{ds^{-1}(q)}\right|^2$$

$$s^{-1}(q) = t \iff s(t) = q$$

$$1 = \left|\frac{d\Phi(t)}{dt}\right|^2 \frac{1}{\left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2} \qquad \frac{ds(t)}{dt} = \sqrt{2-\frac{2}{3}t}$$

$$s(t) = -\sqrt{2-\frac{2}{3}t}^{\,3} + C, \quad s(0)=0, \quad C = 2^{3/2}$$

$$\Rightarrow s:[0,1]\to[0,L(k)]$$

Blatt 2

A1 a) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, \quad \gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

Allg.: $$\int_\gamma f\,ds = \int_I f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt, \qquad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\sin\vartheta\cos\varphi\\ r\sin\vartheta\sin\varphi\\ r\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

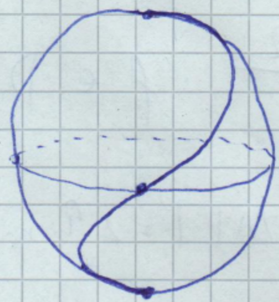
$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix}0\\ \sin t\\ \cos t\end{pmatrix} \Rightarrow \dot\gamma_1(t) = \begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}, \quad \gamma_1:[0,\pi]\to S^2(r=1)$$

$$\int_{\gamma_1} f\,ds = \int_0^\pi \begin{pmatrix}\sin t\\ 0\\ 3\cos^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}dt = \int_0^\pi -3\sin t\cos^2 t\,dt = \int_0^\pi \frac{d(\cos^3 t)}{dt}\,dt = \underline{\underline{-2}}$$

(ii) $r = 1 \quad \varphi = \vartheta$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin^2 t \\ \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

$$\int_{\gamma_2} \underline{f}\, d\underline{s} = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ \sin t \cos t \\ 3 \cos^2 t \end{pmatrix} \cdot \dot{\gamma}_2 \, dt = \int_0^{\pi} 3 \sin^2 t \cos^2 t - \sin^4 t - 3 \sin \cos^3 t \, dt =$$



$$NR: \int_0^{\pi} \sin^4 t \, dt = \underbrace{-\cos t \sin^3 t \Big|_0^{\pi}}_{=0} + 3 \int_0^{\pi} \cos^2 t \sin^2 t \, dt$$

$$\Rightarrow \ldots \overset{NR}{=} \int_0^{\pi} 3 \sin^2 t \cos^2 t - 3 \sin^2 t \cos^2 t + \frac{d(\cos^3 t)}{dt} \, dt = -2$$

b) $$\int_{\gamma_1} \underline{f}_2 \, d\underline{s} = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi} -\cos^2 t - \sin^2 t \, dt = -\pi$$

$$\int_{\gamma_2} \underline{f}_2 \, d\underline{s} = \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ \sin t \cos t - \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin^2 t \\ 2 \sin t \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \cos^3 t - 2 \cos t \sin^2 t - 2 \sin t \cos^2 t - \sin^3 t \, dt = \cancel{\int_0^{\pi} \sin t \cos t - 2 \cos^2 t \sin t}$$

$$= \int_0^{\pi} 2 \sin^2 t \cos t - 2 \cos^2 t \sin t - 2 \cos t \sin^2 t - 2 \sin t \cos^2 t \, dt =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi} \frac{d(\cos^3 t)}{dt} \, dt = -\frac{8}{3}$$

c) Konservatives Kraftfeld: $\nabla \times \underline{F} = 0 \Leftrightarrow \underline{F} = -\operatorname{grad} V$

Satz v. Schwarz („$\Leftarrow$")

$$\nabla \times \underline{f}_1 = 0 \Rightarrow \underline{f} = \operatorname{grad} g$$

$$f_{1_1} = y = \partial_x g \Rightarrow g = xy + c(y, z)$$

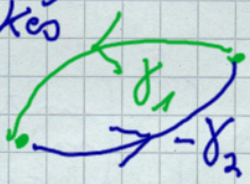
$$f_{1_2} = x = \partial_y g \Rightarrow g = xy + c(x, z)$$

$$f_{1_3} = 3z^2 = \partial_z g \Rightarrow g = z^3 + c(x, y) \Rightarrow g = xy + z^3$$

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f_1\, ds = \int_{\gamma_2} f_1\, ds \Rightarrow \int_{\gamma_1 \vee (-\gamma_2)} f_1\, ds = \int_F \underbrace{\nabla \times f}_{=0}\, dS = 0$

Stokes

$\nabla \times f_2 \neq 0 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f_2\, ds \neq \int_{\gamma_2} f_2\, ds$




## A2

$f \in D([0,a], \mathbb{R}^+)$ $\qquad f : [0,a] \to \mathbb{R}^+$

$|MF| = 2\pi r_s L(k)$ , $r_s = \frac{1}{L(k)} \int_{graph(f)} f\, ds$

Parametr. v. graph f : $s : [0,a] \to$ graph f

$$s(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \Rightarrow s'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

Parametr. von MF : $\Phi : [0,a] \times [0,2\pi] \to MF$

$$\Phi(x,\varphi) = \begin{pmatrix} x \\ f(x)\cos\varphi \\ f(x)\sin\varphi \end{pmatrix}$$ Immersion

$$D\Phi(x,\varphi) = (\partial_x \Phi, \partial_\varphi \Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f'\cos\varphi & -f\sin\varphi \\ f'\sin\varphi & f\cos\varphi \end{pmatrix}$$

metr. Tensor: $(D\Phi)^T D\Phi = \begin{pmatrix} 1+(f')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$.

Gram'sche Determinante: $\sqrt{\det((D\Phi)^T D\Phi)} = f(x)\sqrt{1+(f')^2(x)}$

Allg.: zur Trafo: $\int_\Omega f(x)\, d^n x = \int_{\Omega'} f(\Phi(y)) \sqrt{\det((D\Phi)^T D\Phi)}\, d^n y$

$$\int_{graph\, f} f\, ds = \int_0^a f(x)\, |s'(x)|\, dx\, dx = \int_0^a f(x) \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

$$|MF| = \int_{MF} d^1x = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{\det\left((D\Phi)D\Phi\right)}\, d\varphi\, dx = 2\pi \int_0^a f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

Verknüpft mit $r_s = \frac{1}{L(K)} \int_{graph\, f} ds$

$$|MF| = 2\pi\, r_s\, L(K)$$

A3 (i) $\oint_{S^1(R)} \underline{u}\, \underline{ds} = \int_0^{2\pi} u(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt = \underline{\underline{2\pi R}}$

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}, \quad \gamma'(t) = R\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

(ii) Stokes: $\oint_\gamma \underline{f}\, \underline{ds} = \int_F \nabla \times \underline{f}\, dS$

$$\tilde{u} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r^2 = x^2+y^2$$

$$\nabla \times \tilde{u} = \hat{e}_z \left(\partial_x \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \partial_y \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{r}\hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \oint_{S^1(R)} \underline{u}\, \underline{ds} = \int_{B^2(R)} \nabla \times \tilde{u}\ \hat{e}_z\, dx = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \underbrace{\hat{e}_z \hat{e}_z}_{=1} r\, d\varphi\, dr = 2\pi R$$

A4 (i) $\int_{S^2(R)} f\, d\Sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \left(\frac{1}{r}\hat{e}_r + r\cos\vartheta\, \hat{e}_\vartheta\right)\hat{e}_r\, r^2 \sin\vartheta$

$$= r\, 2\pi\, 2 = 4\pi r$$

(ii) Gauß: $\int_F f\, \vec{n}_S\, dS = \int_V \nabla f\, d^n x$

Divergenz in Kugel-Koord. $\nabla f = \frac{1}{r^2}\partial_r (r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta (\sin\vartheta\, f_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi f_\varphi$

$$\Rightarrow \int_{S^2(R)} f\, \hat{e}_r\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = \int_{B^3(R)} \nabla f\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2}\, r^2 \sin\vartheta + r\, \partial_\vartheta (\sin\vartheta \cos\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \left( R \cdot 2 + \frac{R^2}{2} \underbrace{\left[ \sin\vartheta \cos\vartheta \right]_0^\pi}_{=0} \right) = 4\pi R$$

Blatt 3

holomorphe Fkt.: $f: M \to \mathbb{C}$ holomorph, falls $\forall z \in M$ beliebig oft komplex diffbar (auf ganz $\mathbb{C}$ ⇒ ganze hol. Fkt)

- CR-DGL für $f(x,y) := f_1(x,y) + i f_2(x,y)$, $z = x + iy$

$$\partial_x f_1 = \partial_y f_2$$
$$\partial_y f_1 = -\partial_x f_2$$

$f: M \to \mathbb{C}$ hol. ($M$ ein Gebiet)

$f$ lässt sich um jeden Pkt. $z_0 \in M$ in eine Pot. Reihe entw., wobei Konverg. Radius $R > 0$ $\left( \frac{1}{R} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \right)$ von $z_0$ abhängt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad , \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0) \subset M} dz\, \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}$$

- für geschl. Weg $\gamma: [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) \in M$ gilt:

$$\oint_\gamma f(z)\, dz = 0$$

**A1**

a) $f(z) = \bar{z} = x - iy \; : \; \partial_x f_1 = 1 \neq -1\, \partial_y f_2$ ↯

b) $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 - y^2} \; : \; \partial_x f_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \neq 0 = \partial_y 0 = \partial_y f_2$ ↯

c) $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

$$\partial_x f_1 = \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\partial_y f_2 = \partial_y \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-1}{x^2 + y^2} + \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \checkmark$$

$$\partial_y f_1 = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\partial_x f_2 = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \checkmark$$

**A2**

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \; : \; f(x, y) = f_1 + i f_2 = y^2 - x^2 + i f_2$

CR-DGL: $\partial_x f_1 = -2x = \partial_y f_2 \Rightarrow f_2 = -2xy + C(x)$

$-\partial_y f_1 = -2y = \partial_x f_2 \Rightarrow f_2 = -2xy + C(y)$

$\Big\} \; C = \text{const.} \overset{\text{beliebig}}{=} 0$

$$\Rightarrow f = y^2 - x^2 - i2xy = -(x^2 + i2xy - y^2) = -(x^2 + 2ixy + (iy)^2) = \underline{\underline{-z^2}}$$

A3 • $f$ diffbar in $x_0 \in \mathbb{R}$ falls $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert

• $f$ stetig, falls $\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0)$

zu diffbar in 0: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

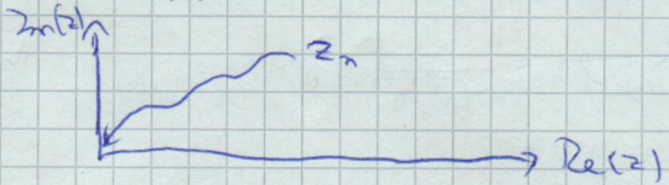
zu Stetigkeit von $f' = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} -\sin\left(\tfrac{1}{x}\right) \text{ nicht def! } ↯$$

Ist $f$ kompl diffbar?

$f$ ist in $z_0 \in \mathbb{C}$ diffbar, falls für jede beliebige Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 0$, so ~~diff~~ dass $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(z_0 + z_n) - f(z_0)}{z_n}$ existiert

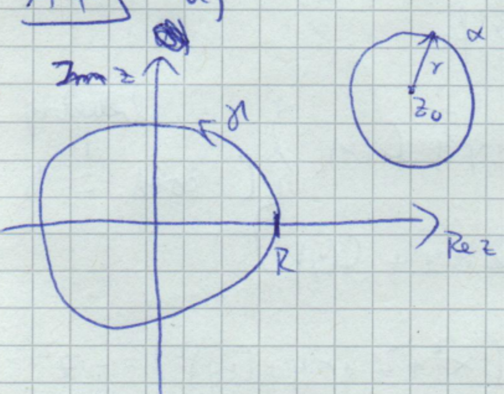



$$f(z) = z^2 \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 \left(\frac{e^{i/z} + e^{-i/z}}{2}\right)$$

Betrachte $z_0 = 0$, $z_n = \frac{i}{n}$: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(z_n) - f(0)}{z_n} = \lim\limits_{n \to \infty} z_n \cos\left(\frac{1}{z_n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{i}{n} \cos(-in)$

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{i}{n} \cosh(n) = i\infty$ existiert nicht!

A4 a)




$\alpha(t) = r e^{2\pi i t} + z_0$

Allg. zu Konvention. $\int_\gamma f(z)\, dz = \int_I f(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$

$$\int_{\gamma_1} x\, dz = \int_0^1 R \cos(2\pi t)\, R (2\pi i)\, e^{2\pi i t}\, dt =$$

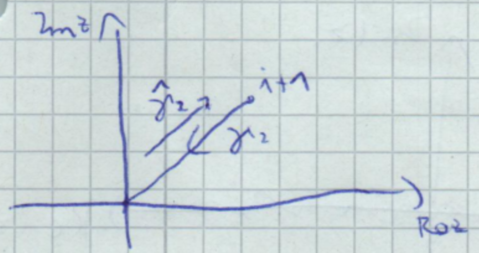
$$= R^2\, 2\pi i/2 \int_0^1 \left(e^{2\pi i t} + e^{-2\pi i t}\right) e^{2\pi i t}\, dt$$

~~$= \int \mathrm{Re}(z)\, dz = \ldots$~~

⟶

$\Rightarrow \int_{\gamma_1} \mathrm{Re}(z) = \ldots = R^2 \frac{2\pi i}{2} \int_0^1 e^{4\pi i t} + 1 \, dt = \frac{R^2}{4} \Big( \underbrace{e^{4\pi i t}\Big|_0^1}_{=0} + 1 \Big) = \frac{R^2}{4}$

b)



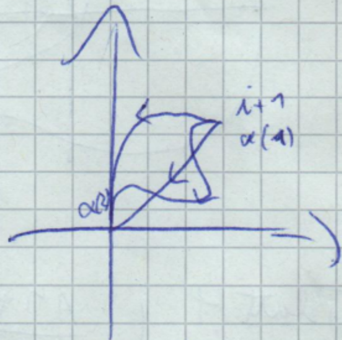

$\gamma_2(t) = (i+1)(1-t)$

$\hat\gamma_2(t) = (1+i)\,t$

$\int_{\gamma_2} e^{(1+i)\pi z} \, dz = \int_0^1 e^{(1+i)^2 \pi (1-t)} \cdot -(i+1) \, dt = \int_0^1 \underbrace{e^{2i\pi}}_{=1} e^{-2i\pi t} (-i-1) \, dt =$

$= \frac{-(i+1)}{-2i\pi} e^{-2\pi i t} \Big|_0^1 = 0$ , $\gamma_2(1) = 0$

$f(z) = e^{az}$ ist holomorph



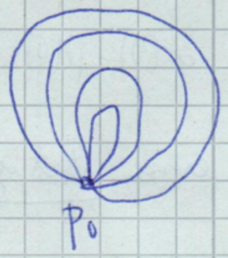

$\oint f(z) \, dz = 0$    $\oint f(z) \, dz = \int_{\gamma_2} + \int_{\hat\gamma_2} f(z) \, dz$

$\Leftrightarrow \int_{\gamma_2} f(z) \, dz = - \int_{\hat\gamma_2} f(z) \, dz$

$F(z_1) - F(z_0) = \int_\alpha f(z) \, dz$ , $\gamma_2(t)$ beliebig, da $f(z) = e^{az}$ holomorph

A5)

nullhomotop: Punkt $p_0$




$\forall t \in I : \gamma(t) > p_0$ Punkt / Kurve

Homotopie

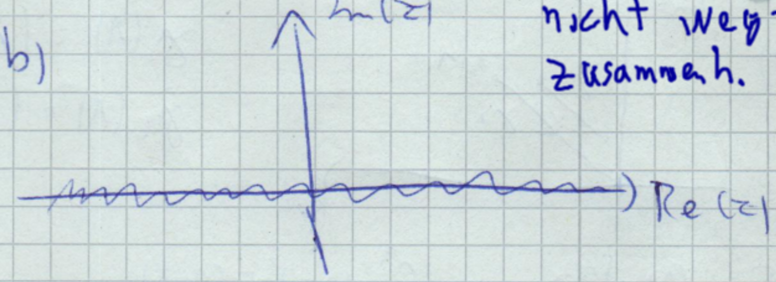

a) ~~wegzusammenhängend~~

einfach zusammenhängend: Für beliebigen Punkt $p_0$ ist jede Kurve dazu Nullhomotop + wegzusammenhängend.

a)

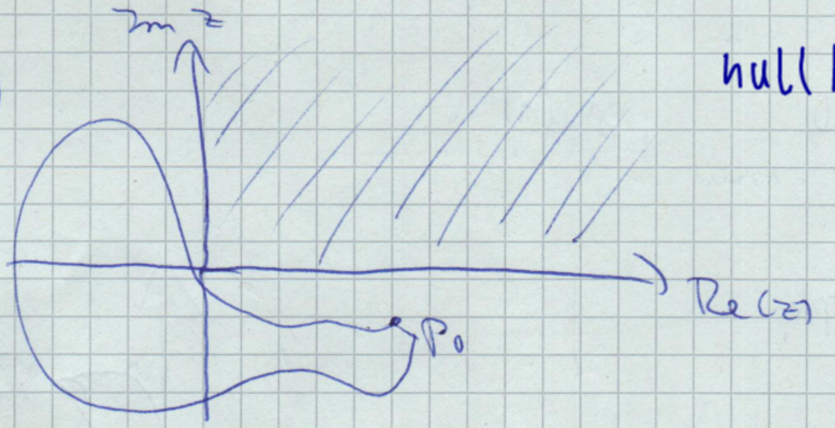

nicht nullhomotop

b)




nicht weg-zusammenh.

c)




null homotop

Blatt 4 | A1 d)

Def: • wegzshngd.: Ein top. Raum $U$ ist wegzh., falls für jedes Paar v. Pkt. $x, y \in U$ eine Kurve $\gamma$ von $x$ nach $y$ gibt, d.h. $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$

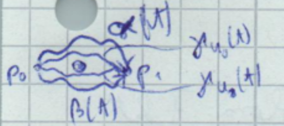
• Homotopie: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge und $p_0, p_1 \in U$ und seien $\alpha, \beta : [0,1] \to U$ zwei Kurven von $p_0$ nach $p_1$, d.h. $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$, $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$. Die Kurven heißen homotop, falls es eine stetige Abb. $A : [0,1] \times [0,1] \to U$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(u, t) \longmapsto A(u, t)$$

(i) $A(0, t) = \alpha(t)$, $A(1, t) = \beta(t)$, $\forall t \in [0,1]$

(ii) $A(u,0)=p_0$ , $A(u,1)=p_1$ , $\forall u\in[0,1]$

**Bem.:** Def.: $\gamma_u(t)=A(u,t)$ , $\gamma_u:[0,1]\to U$, $\gamma_0(t)=\alpha(t)$ , $\gamma_1(t)=\beta(t)$




$(\gamma_u)_{0\le u\le 1}$ ist stet. geschlos. Kurve

• Nullhomotop: geschl. Kurve $\gamma:[0,1]\to U$ mit $\gamma(0)=\gamma(1)=p_0\in U$ heißt nullhomotop, falls sie in $U$ homotop zur Punktkurve in $p_0$ ist. Punktkurve: $\gamma(t)=p_0\ \forall t\in[0,1]$


• einfach zsmhäng.: $U\subset\mathbb{R}^n$ offen und zsmhäng. (d.h. ein Gebiet) falls Punkt $p_0\in U$ existiert, sodass jede geschl. Kurve $\gamma:[0,1]\to U$ mit $\gamma(0)=\gamma(1)=p_0$ muss nullhom. sein

• Sterngebiet: $U\subset\mathbb{R}^n$ sternf. (bzgl. Pkt. $p\in U$) $\Leftrightarrow$ $\forall$ Pkt. $x\in U$ ist gesamte Strecke $p\to x$ $\{(1-t)p+tx,\ t\in[0,1]\}$ in $U$

Sterngeb. $\Rightarrow$ einf. zsmh. $\Rightarrow$ wegzshg. $\Rightarrow$ zsmh. aber nicht $\Leftarrow$ !

**A2)** a)
$$\int_{\substack{|z-2|=5\\ \partial B_5(2)}} dz\ \frac{\sin(z)}{z-2} \quad f(z) \text{ holomorph} \quad \overset{\text{C. Int.}}{\underset{z_0:=2}{\Rightarrow}} \quad 2\pi i\sin(2)=\int_{\partial B_5(2)} dz\ \frac{\sin z}{z-2}$$

b)
$$\int_{\partial B_2(0)} dz\ \frac{\sin z}{z+i} \Rightarrow \quad 2\pi i\sin(-i)=\int_{\partial B_2(0)} dz\ \frac{\sin z}{z+i}=2\pi\sin(1)$$

c)
$$\int_{\partial B_3(-2i)} dz\ \frac{1}{z^2+\pi^2}=\int_{\partial B_3(-2i)} dz\ \frac{1}{(z-i\pi)(z+i\pi)} \quad ,\ -i\pi\in B_3(-2i),\quad i\pi\notin B_3(-2i)$$

Cauchy-Integralformel: Sei $D\subset\mathbb{C}$ ein Gebiet und $f$ holomorph, $f:D\to\mathbb{C}$, $z_0\in D$, $B_r(z_0)\subset D$
$$\Rightarrow \quad f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B_r(z_0)} dz\ \frac{f(z)}{z-z_0}$$

$$f(z)=\frac{1}{z-i\pi} \quad \text{holomorph auf } B_3(-2i)$$

$$\Rightarrow \int_{\partial B_3(-2i)} dz\ \frac{f(z)}{(z+i\pi)} = 2\pi i\, f(-i\pi) = -1$$

oder Partial. Zerl.:
$$\int_{\partial B_3(-2i)} dz\ \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-\pi i}-\frac{1}{z+\pi i}\right)=\frac{1}{2\pi i}\Bigg(\underbrace{\int_{\partial B_3(-2i)}\frac{dz}{z-i\pi}}_{=0,\ \text{da } i\pi\notin B_3(-2i)}-\underbrace{\int_{\partial B_3(-2i)}\frac{dz}{z+\pi i}}_{=2\pi i}\Bigg)$$

A3) a)

$f(z) = e^{az}$, $a \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph

$d_z F(z) = f(z) \Rightarrow F(z) = \frac{1}{a} e^{az}$

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. $D$ ist einf. zus. h. $\Leftrightarrow$ jede holom. Fkt.

$f: D \to \mathbb{C}$ besitzt eine Stamm Fkt. auf $D$

b) $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$

$\Rightarrow F(z) = \ln z$ existiert nicht eindeutig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ da nicht einf. z.h.

aber: $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^- \to \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{1}{z}$, $F(z) = \ln(z)$ existiert

Beispiel: $f: \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{C}$, $F(z) = \ln(-z)$ existiert, da $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^+$ einf. z.h.

Bsp. 2: $f: \mathbb{C} \setminus \{t(1+i), t \in \mathbb{R}_0^+\}$, $F(z) = \ln\left(\frac{-z}{1+i}\right)$ ✓

A4)

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom. auf ganz $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\forall r \in [0, \infty[$ | $\partial B_r(z)$ beliebig

$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, f(z + re^{i\varphi})$, $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} dw \, \frac{f(w)}{w-z}$

Def. Kurve $\gamma(\varphi) = z + re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, 2\pi[$

Kurvenintegral:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{f(\gamma(\varphi))}{\gamma(\varphi) - z} \gamma'(\varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{f(z + re^{i\varphi}) \cdot r e^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \, f(z + re^{i\varphi})$$

Sei $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ holom., $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $|f(z)| < M|z|^\alpha$ mit $\alpha < 1$ und $M > 0$ konst., dann ist $f(z)$ konst.

Bew.: Sei $B_r(0)$ groß genug, sodass $z \in B_r(0)$

$$f(z) - f(0) \overset{CI}{=} \frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w)}{w} \, dw \right)$$

$$|f(z) - f(0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\right| \left| \int_{\partial B_r(0)} dw \, \frac{f(w) z}{w(w-z)} \right| \leq \frac{|z|}{2\pi} \int_{\partial B_r(0)} d\cancel{w} \frac{|f(w)|}{|w||w-z|}$$

$$\overset{\text{vorr.S.}}{\leq} \frac{|z|}{2\pi} \int_{\partial B_r(0)} dw \, \frac{M|w|^{\alpha-1}}{|w-z|}$$

$\Delta$-Ungl.: $|w-z| \geq |w| - |z| > 0$, $w \in \partial B_r(0)$, $z \in B_r(0)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|w| - |z|} \geq \frac{1}{|w-z|} \qquad \Downarrow \; |w| = r$$

$$\Rightarrow |f(z) - f(0)| \leq \ldots \leq \frac{|z|}{2\pi} M \int_{\partial B_r(0)} dw \, \frac{|w|^{\alpha-1}}{|w|-|z|} = \frac{|z| M}{2\pi} \underbrace{\int_{\partial B_r(0)} dw \, \frac{r^{\alpha-1}}{r-|z|}}_{= 2\pi r \frac{r^{\alpha-1}}{r-|z|}}$$

$$\leq \frac{M|z|}{r-|z|} r^\alpha = \frac{1}{r^{1-\alpha}} \frac{M|z|}{1 - \frac{|z|}{r}}$$

da $f$ auf ganz $\mathbb{C}$ holom. $\Rightarrow r$ beliebig groß $\Rightarrow r \to \infty$

$|f(z) - f(0)| \underset{r \to \infty}{=} 0$, $f(z) = f(0)$, da $z$ beliebig war

$\Rightarrow f(z)$ konst. ✓

= Satz von Liouville

Zusatz:

$\Rightarrow$ Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom besitzt mind. eine Nullstelle auf $\mathbb{C}$

Sei $p_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynom $n$-ten Grades, so besitzt $p_n$ $n$ Nullstellen in Vielfachheiten gerechnet

~~Bsp~~ $p_n(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$

Bew.: Widerspruch: falls $p_n(z)$ hat keine Nullstelle

$\Rightarrow \frac{1}{p_n(z)}$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ holom. $\Rightarrow \left|\frac{1}{p_n(z)}\right| \leq M := \max_{z \in \mathbb{C}} \left|\frac{1}{p_n(z)}\right|$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{p_n(z)}\right| \leq M |z|^0 \xRightarrow{\text{S.v.Liou.}} \frac{1}{p_n(z)}$ konst. $\lightning$

$\Rightarrow p_n(z)$ hat mind. eine Nst.

$$p_n(z) = (z - \lambda) \underbrace{(z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_0)}_{= p_{n-1}(z)}$$

$\Rightarrow$ Zeige wieder $p_{n-1}(z)$ hat mind eine Nst.

$\Rightarrow p_n(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\, p_{n-2}(z)$

$\Rightarrow p_n(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_n)$

30.11.2017, Identitätsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ Elementargebiet (d.h. einfach zsmh.) und $f, g : D \to \mathbb{C}$ holom.

$\Rightarrow$ äqui

a) $f \equiv g$ auf $D$

$\Updownarrow$

b) Koinzidenzmenge $M := \{ z \in U \mid f(z) = g(z) \}$ hat Häufungspkt. $a \in U$

$\Updownarrow$

c) $\exists\, b \in U$ mit $f^{(j)}(b) = g^{(j)}(b)$ $\forall j \in \mathbb{N}_0$

2. Variante:

$\exists$ eine Folge $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset D$, $\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = z_0$

$$f(z_\nu) = g(z_\nu) \longrightarrow f(z) \equiv g(z) \; \forall z \in D$$

~~2. Variante~~

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet (offentlich) und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$

holomorph, d.h $\forall z_0 \in D$ existiert ein Kreis $B_r(z_0) \subset D$

mit $r > 0$ in denen $f, g$ um $z_0$ in eine Potenzreihe entwickelbar

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (z - z_0)^n$$

Falls eine Folge $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ und $\lim_{\nu \to \infty} z_\nu = z_0 \implies f \equiv g$

A1) $$\frac{f^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z)} dw \, \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}$$

$$\int_{\partial B_1(3/2)} dz \, \frac{e^z}{z(z-1)} = \int_{\partial B} dz \, \frac{e^z/z}{(z-1)^3} = \left( \frac{\partial_z^2 (e^z/z) \big|_{z=1}}{2} \right) \cdot 2\pi i =$$

$$= \pi i \left( \frac{e^{z_0}}{z_0} - \frac{e^{z_0}}{z_0^2} - \frac{e^{z_0}}{z^2} + \frac{2e^{z_0}}{z_0^3} \right) \Bigg|_{z_0 = 1} = \underline{\underline{\pi i e}}$$

$f : \overline{B_1(3/2)} \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \frac{e^z}{z}$ ist holom. $\implies g(f(z)) \implies$ holom.

$f(g(z)) \implies$ holom.

A2) $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ $f(z) = \frac{e^z}{z-1}$ holom.

Entwickle $f(z)$ um 0, d.h. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $a_n = \frac{\partial_z^n f(z)}{n!}$

Leibnitzregel: $\frac{\partial^n}{\partial z^n} g(z) h(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(z) h^{(n-k)}(z)$

$$\underbrace{\frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left( \frac{e^z}{1-z} \right) \Big|_{z=0}}_{= a_n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{(e^z)^{(k)}}_{=1} \left( \frac{1}{1-z} \right)^{(n-k)} \Big|_{z=0}$$

$$= -\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(1-z)^{n-k+1}} \Big|_{z=0}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad 1 \leq |a_n| \leq e \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Variante 2: Cauchy-Produktregel nicht relevant !

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad , c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Bed.: Beide Reihen müssen absolut konvergieren

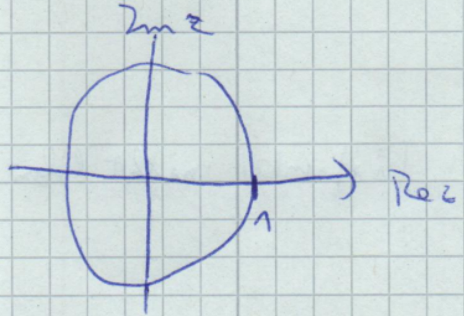
$$f(z) = \frac{-1}{1-z} e^z = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \overset{C.P.}{=} -\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} z^{n-k} \frac{z^k}{k!} \quad , \quad c_n = \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) z^n$$

Konvergenzradius: $\frac{1}{r} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{hier}{=} 1$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Konv.: $\forall z \in B_1(0)$

für $\partial_1 B(0)$ keine ~~Aussa~~ eindeutige Aussage möglich: $f(i)$ konv.
$f(-i)$ nicht!




da $z_0 = 0$ und $f(z)$ Pol an $z = 1$

$\Rightarrow$ max $r = 1$

A3) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ holom.

a) z.z. $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}$ gef. durch $g(z) := \bar{f}(\bar{z})$ ist hol.

$f(x,y) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$ $\quad f_1, f_2$ sind reell

$\Rightarrow$ CR-DGL: $\partial_x f_1 = \partial_y f_2 \quad , \quad \partial_y f_1 = -\partial_x f_2$

$g(x,y) = \bar{f}(x,-y) = f_1(x,-y) + i f_2(x,-y)$

$\longleftarrow$ Kettenregel

(i) $\partial_x f_1(x,-y) = -\partial_y f_2(x,-y) = \frac{\partial}{\partial(-y)} f_2(x,-y) = \partial_{\tilde{y}} f_2(x,\tilde{y})$ ✓

(ii) $\partial_y f_1(x,-y) = \partial_y g_1(x,y) = -\frac{\partial}{\partial(-y)} f_1(x,-y) = -\partial_{\tilde{y}} f_1(x,\tilde{y}) = \partial_x f_2(x,\tilde{y})$

$\Leftrightarrow \partial_x f_2(x,-y) = -\partial_x(-f_2(x,-y)) = -\partial_x g_2(x,y)$

A4) $f(z)$ $\forall z \in (1,\infty)$ reell

$f(z)$ holom. nach a) folgt $\bar{f}(\bar{z})$ holom. auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

$a \in (1,\infty)$ $\quad \bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(a) = f(a)$ nach VS.

Def. $z_\nu = \frac{1}{\nu} + a \quad , \quad a \in (1,\infty)$

$\Rightarrow$ Identitätssatz $f(z) \equiv \overline{f}(\overline{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Für alle reellen Zahlen gilt $z = \overline{z}$

$$\overline{f}(\overline{z}) = \overline{f}(z) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

a) z.z. mit Identitätssatz, dass (i) $\sin \overline{z}$, (ii) $\sin |z|$ nicht holom.

Sei $\sin \overline{z}$ holom.: $\Rightarrow z_\nu = \frac{1}{\nu}$, $\lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu = 0$

$\sin(\overline{z}_\nu) = \sin(z_\nu) \quad \Rightarrow \quad \sin(\overline{z}) = \sin(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$ $\lightning$ Widerspr.

da $\sin(i) \neq \sin(-i)$

(ii) Sei $\sin |z|$ holom.

$\Rightarrow z_\nu$ " ... " $\overset{IS.}{\Rightarrow} \sin|z| = \sin(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$ $\lightning$ zu $\sin(-1) = \sin 1$

$\Rightarrow$

b) $f(z) = \sin z \quad g(z) = 2\sin(z)$, $z_\nu = \pi\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{Z}$

$f(z_\nu) = g(z_\nu) = 0$

? Warum nicht auch $\sin z = 2 \sin z$, da $z_\nu$ keinen Häufungspkt hat

Bsp.: $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \quad f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ holom.

Definiere: $z_\nu = \frac{1}{\pi\nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

$\lim\limits_{\nu \to \infty} z_\nu = 0$

Def.: $g(z) = 0 \qquad g(z_\nu) = f(z_\nu) = 0$

Denkfehler: $(z_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset B_r(0) \not\subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

# M3 - Tutorium

## Blatt 6

um $z_0 = 0$ konv. $z \in B_2(0) \setminus \{0\}$

A1) a) $f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{(z-2)} = \frac{1}{z^2}\left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \overset{\text{geom. Reihe}}{=}$

$= \frac{1}{z^2}\left(-\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-2} = -\frac{1}{8} \sum_{k=-2}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k$

$\Rightarrow 0 < \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Rightarrow 0 < |z| < 2$

$\sum_{n=\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

$\forall \ |z| < 1$

---

**Allgemein:**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, $r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{r}$

$\Leftrightarrow r < |z|$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{-n}}_{r = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k}_{\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|b_k|}}$$

$\Downarrow$ $|z - z_0| > r$

$\Downarrow$ $|z - z_0| < R$

$\Rightarrow r < |z - z_0| < R$

---

b) $f(z) = \frac{1}{z^2} \frac{1}{z-2}$, um $z_0 = 0$, konv. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_2(0)}$

soll: $f(z) = \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n}$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \overset{\text{geo. Rei.}}{=} \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$

da geom. Reihe folg für Konvergenz $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$

$\Leftrightarrow 2 < |z|$

$f(z) = \frac{1}{8} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^{n+3} = \frac{1}{8} \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

c) <u>1. Variante:</u> $g(z) = \frac{1}{z-1} e^{1/z}$, um $z_0 = 1$, konverg.

$\forall\ 0 < |z-1| < 1$

$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{1+(z-1)}\right)^n \underset{|z-1|<1}{\overset{\text{geo. Rei.}}{=}}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-(z-1))^j\right)^n$

$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-(z-1))^j\right)^n$

$\Rightarrow \quad 0 < |z-1| < 1$

<u>2. Variante:</u> nicht relevant!

$\frac{e^{1/z}}{z-1} \qquad \sum a_n \sum b_n = \sum c_n \quad , \; c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

$\frac{1}{z} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$\frac{1}{z} : \mathbb{C} \setminus \{\forall z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0\} \longrightarrow \frac{1}{z}$

$\Downarrow$

Elementargebiet, da einfach zusamm. häng.

Sterngebiet $\Rightarrow$ einf. z. h.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z-a)^n}_{\text{Hauptteil}} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

d) $h(z) = \frac{\sin(2z)}{z^3}$ entw. um 0

$$h(z) = \frac{2^3}{2^3 z^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2z)^{2k-2} = 2^3 \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)}{(2n+3)!} (2z)^{2n}$$

$n = k-1 \Rightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\frac{1}{r} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$ , $n!^2 = \overbrace{n \cdot 1}^{\geq n} \overbrace{(n-1) 2}^{\geq n} \cdots \overbrace{2 (n-1)}^{\geq n} \overbrace{1 n}^{\geq n} \geq n^n$

$\Downarrow$

$\boxed{n! \geq n^{n/2}}$

$(n-j)(j+1) \geq n \quad \forall j \in \{0, \dots, n-1\}$

$nj - j^2 + n - j \geq n \iff n - j \geq 1$

A2) a) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom. , $|f(z) - 3| \leq 1$

bestimme alle $f(z)$

$\Delta$-Ungl. $\Rightarrow$ $|f(z)| - 3 \leq |f(z) - 3| \leq 1$

$\Rightarrow |f(z)| \leq 4$

Bsp.
$|f(z) - 3| = r$
$f(z) = g(z) + 3$
$\Rightarrow |g(z)| = r$

da $f(z)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holom. + beschränkt

$\Rightarrow$ S. v. Liouville $f(z) =$ const.

$f_{t,r}(z) = 3 + r e^{it}$ $\forall r \in [0,1]$ , $\forall t \in [0, 2\pi[$

$|f(z) - 3| = r \leq 1$

b) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hol. und mit Eigenschaft $\forall z \in \mathbb{C}$

mit $|z| \geq 3$ $|f'(z)| \leq 1 + e^{-|z|}$

z.z. $\exists a, b \in \mathbb{C}$ sodass $f(z) = az + b$

da $f$ hol. auf ganz $\mathbb{C} \Rightarrow f'$ auf $\mathbb{C}$ hol.

$\Rightarrow |f'|$ stet. auf $\mathbb{C}$ $\Rightarrow |f'|: \overline{B_3(0)} \to \mathbb{R}$ ist

stet. und da $\overline{B_3(0)}$ kompakt. $\Rightarrow \exists z_0 \in B_3(0)$ mit

$M = |f'(z_0)| \geq |f'(z)|$ $\forall z \in \overline{B_3(0)}$

$C := \max\{M, 1 + e^{-3}\} \Rightarrow |f'(z)| \leq C$ $\forall z \in \mathbb{C}$

$\overset{\text{Satz v. Liouville}}{\Longrightarrow}$ $f'(z) = a = \text{const.} \Longrightarrow f(z) = az + b$

A3) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch,

nicht konst.

$f(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$

$f(z) \cancel{=} \sum_{n=0} a_n (\bar{z} - z_0)^n$

$\sin(\bar{z})$ nicht hol.

$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \bar{z}$

$\frac{\partial}{\partial z} \sin \bar{z} = 0$

Beweise: $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$, d.h. $\forall w \in \mathbb{C}$

und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists z \in \mathbb{C}$, sodass

$|f(z) - w| < \varepsilon$ gilt

per Widerspruch: $\exists w \in \mathbb{C}$ und $\exists \varepsilon > 0 \; \forall z \in \mathbb{C}$, sodass

$|f(z) - w| \geq \varepsilon$

$g(z) := \frac{1}{f(z) - w} \Rightarrow f$ auf $\mathbb{C}$ hol. $f(z) - w \neq 0$

$\hookrightarrow g(z)$ hol. auf $\mathbb{C}$

$\Rightarrow |g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\overset{\text{S.v. Liouville}}{\Longrightarrow}$ $g(z) = \text{const.}$ $\lightning$

A4) Gebiet $U$, $f: U \to \mathbb{C}$ hol.

a) Bew. Maximumsprinzip, wenn $f$ bei $a \in U$ ein lok.

max. existiert, d.h. $\exists r > 0$ sodass $B_r(a) \subset U$ mit

$|f(z)| \le |f(a)| \quad \forall z \in B_r(a)$ ; $f(z)$ nicht konst. auf $B_r(a)$

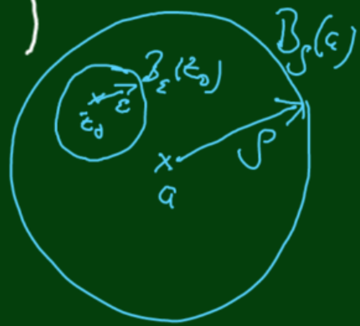
(falls $f(z) = \text{const.}$ auf $B_r(a) \Rightarrow$ nach Identitätssatz

$f(z) = \text{const.} \ \forall z \in U$ )

$\Rightarrow \exists z_0 \in B_r(a)$ und $z_0 \in \partial B_\rho(a)$ wobei $0 < \rho < r$,

sodass $|f(z_0)| < |f(a)|$. Mit dem Mittelwertsatz

folgt: $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} dt \ f(a + \rho e^{it})$




$|f(a)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{it})| \, dt$

da $z_0 \in \partial B_\rho(a)$ und da $f(a+\rho e^{it})$ stet., $\exists$ eine

kleine Umgebung $B_\varepsilon(z_0)$, sodass $|f(z)| < |f(a)|$

$\forall z \in B_\varepsilon(z_0)$

$$\Rightarrow |f(a)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \ |f(a+\rho e^{it})| < \frac{|f(a)|}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt$$

$\Rightarrow |f(a)| < |f(a)| \quad ↯$

$\Rightarrow |f(z)| = \text{const.} \overset{(*)}{\Rightarrow} f(z) = \text{const.}$

(*) da $|f| = r = \text{const}$ $\exists \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = f(x,y) = r e^{i\varphi(x,y)} = \underbrace{r\cos(\varphi(x,y))}_{= f_1(x,y)} + i \underbrace{r \sin(\varphi(x,y))}_{= f_2(x,y)}$$

mit C-R-DGL:

① $\partial_x f_1 = \partial_y f_2 \Rightarrow -\sin(\varphi)\, \partial_x \varphi = \cos\varphi\, \partial_x \varphi$

$\Rightarrow -\tan\varphi\, \partial_x \varphi = \partial_y \varphi \quad (*)$

② $\partial_y f_1 = -\partial_x f_2 \Rightarrow -\sin\varphi\, \partial_y \varphi = -\cos\varphi\, \partial_x \varphi$

$\Rightarrow \tan\varphi\, \partial_y \varphi = \partial_x \varphi \quad (**)$

$(*)$ in $(**)$ : $-\tan^2\varphi\, \partial_x \varphi = \partial_x \varphi$

$\Leftrightarrow (\tan^2\varphi + 1)\, \partial_x \varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}\, \partial_x \varphi = 0$

$\Rightarrow \partial_x \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \text{const} \Rightarrow f = \text{const}.$

$\Rightarrow f(z) = b = \text{const}$ auf $B_r(a)$

$\Rightarrow$ mit Identitätsatz $(g(z) = b,\ g(z) = f(z)\ \forall z \in B_r(a)$

$\Rightarrow f(z) = g(z) = b \quad \forall z \in U$

b) $f: B_2(0) \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

$\Rightarrow \exists z \in B_2(0)$, sodass $|f(z)| > 1$

Beweis über Widerspruch:

$\forall z \in B_2(0) \quad |f(z)| \leq 1$

$\Rightarrow$ lok. Max bei $z = 1$

$f(1) = 1$

$\Rightarrow f(z) = \text{const.} \Rightarrow f(0) = 0 \quad \lightning$

"für holom. Fkt muss Max am Rand liegen"

Blatt 7

A1

$E \subset \mathbb{C}$ Elementargebiet, $a \in E$, $f : E \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph

a) Zeige: $a$ ist Pol $\Longleftrightarrow \lim_{z \to a} |f(z)| = \infty$

(i) sei $a$ ein Pol $n$-ten Grades:

$\exists r > 0$, sodass $\forall z \in B_r(a)$

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad , \quad a_{-m} \neq 0$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-a)^{n+m}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (z-a)^n}_{= g(z)}$$

$= g(z)$, wobei $g(z)$ holom. auf $B_r(a)$

mit $g(a) = a_{-m}$

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} \left| \frac{g(z)}{(z-a)^n} \right| = \lim_{z \to a} \frac{1}{(z-a)^n} a_{-m} \longrightarrow \infty$$

(ii) Ann.: $\lim_{z \to a} |f(z)| \longrightarrow \infty$ $\left( \text{"}\Leftarrow\text{"} \right)$

$\exists\, r > 0$, $\exists\, \varepsilon > 0$, sodass $\forall z \in B_r(a) \setminus \{a\}$

$|f(z)| \geq \varepsilon > 0$ (wobei r beliebig klein)

(aus Stetigkeit)

$\frac{1}{f(z)} := g(z) \Rightarrow \lim_{z \to a} |g(z)| = 0$

$\Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}$, $m > 0$, sodass $\forall z \in B_r(a)$

$$g(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n (z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m}$$

$$= (z-a)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+m} (z-a)^k}_{= h(z) \text{ holom. auf } B_r(a)}$$

und $h(a) = b_m \neq 0$

$$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z-a)^m h(z)$$

$\exists\, \rho > 0$, $\exists\, \varepsilon' > 0$, sodass $|h(z)| \geq \varepsilon'$ $\forall z \in B_\rho(a) \subset B_r(a)$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h(z)}$ $\forall z \in B_\rho(a) \setminus \{a\}$

holomorph

$$\lim_{z \to a} |f(z)| = \lim_{z \to a} \frac{1}{|z-a|^m} \frac{1}{|b_m|} \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{z \to a} |(z-a)^m f(z)| = \frac{1}{|b_m|} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $f$ hat in $a$ eine Polstelle $m$-ter Ordnung

b) $a$ wesentliche Sing. $\Leftrightarrow$ $\exists$ zwei Folgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sodass $\lim\limits_{n \to \infty} |f(z_n)| \neq \lim\limits_{n \to \infty} |f(y_n)|$

Satz von Weierstraß – Casorati :

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $a \in G$ ist genau dann eine wesentl. Sing. der auf $G \setminus \{a\}$ holom. Fkt.

$f : G \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, wenn für jede beliebige Umgebung $U$ um $a$ das Bild $f(U \setminus \{a\})$ dicht in $\mathbb{C}$.

D.h. $\forall \rho > 0$, $\forall w \in \mathbb{C}$, $\forall \varepsilon > 0$

$\exists z_{\rho,\varepsilon,w} \in B_\rho(a) \setminus \{a\} \subset G \setminus \{a\}$, sodass

$|f(z_{\rho,\varepsilon,w}) - w| < \varepsilon$ $\qquad (*)$

Definiere $z_n := z_{\frac{1}{n},\frac{1}{n},w} \in B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\}$

$\left( (*)\ \rho = \varepsilon\ \frac{1}{n} \right)$ $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$

$\forall n > 0$ gilt (wegen $(*)$): $|f(z_n) - w| = |f(z_{\frac{1}{n},\frac{1}{n},w}) - w| < \frac{1}{n}$

$\Delta$-Ungl.: $\quad |f(z_n)| - |w| \leq |f(z_n) - w| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} + |w| \longrightarrow |w|$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = |w| \longrightarrow \neq$

$\Longrightarrow$ Definiere $y_n = y_{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{w}{2}} \in B_{\frac{1}{n}}(a) \setminus \{a\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \qquad \lim\limits_{n\to\infty} |f(y_n) - \frac{w}{2}| < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f(y_n)| = |\frac{w}{2}| \neq \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)|$

$(\text{"}\Leftarrow\text{"}):\ \lim\limits_{n\to\infty} |f(y_n)| \neq \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| \longrightarrow a$ wesentl. Sing.

Widerspruch: $a$ keine wesentl. Sing.

$\left(\Rightarrow \forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ gilt } \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = \begin{cases} \infty \\ a \in \mathbb{R}_0^+ \end{cases}\right)$

Falls $a$ ein Pol (nach 1(c)) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = a$

$\Rightarrow \forall (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(y_n)|$

A2) $\quad f(z) = \dfrac{z-i}{z^2+1} \sin\frac{1}{z} = \dfrac{z-i}{(z-i)(z+i)} \sin\frac{1}{z}$

$f: \mathbb{C} \setminus \{\pm i, 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holom.

isol. Sing. bei $z_1 = -i$ , $z_2 = +i$ , $z_3 = 0$

$$z_1 : \quad \lim_{z \to z_1} |f(z)| = \frac{1}{|z+i|} \underbrace{\left|\sin \frac{1}{-i}\right|}_{< \infty} \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{z \to -i} |(z+i)\, f(z)| = \sin(i) = \overbrace{|i \sin(1)|}^{\in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}} < \infty$$

$\Rightarrow$ $z_1 = -i$ Pol von Grad 1

$$z_2 : \quad \lim_{z \to i} |f(z)| = \left| \frac{\sin(-i)}{2i} \right| < \infty \quad \Rightarrow \text{ hebbare Sing.}$$

$z_3$: siehe 1 b) def.: $z_n = \frac{1}{2\pi n}$ $\forall\, n > 0$

$$y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$$

$$f(z_n) = \frac{1}{z_n + i} \underbrace{\sin(2\pi n)}_{= 0} \quad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(z_n) = 0$$

$$f(y_n) = \frac{1}{y_n + i} \underbrace{\sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}_{= 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{y_n + i} \right| = 1 \neq \lim_{n \to \infty} |f(z_n)|$$

$\Rightarrow$ wesentl. Sing.

$$e^{1/z}$$

A3)
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{x^2}{(x^2+4)^2}$$

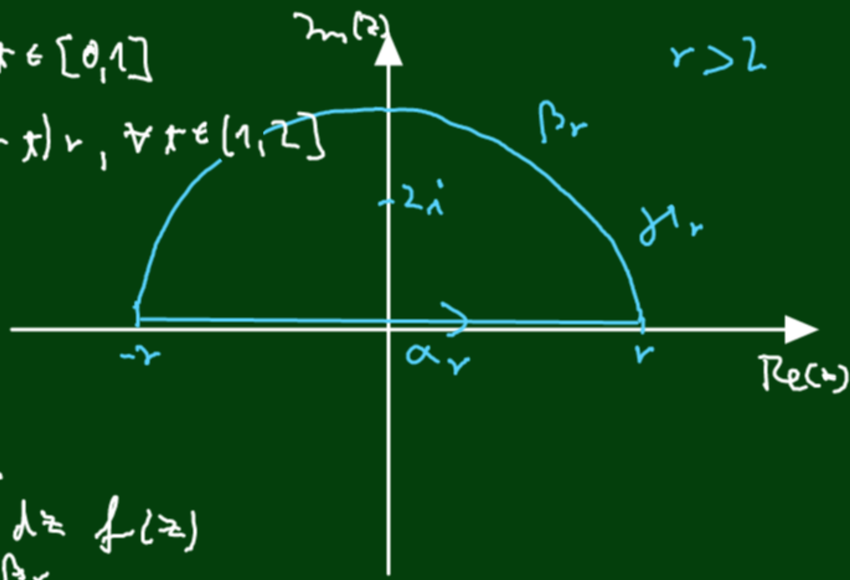
Definiere $I_r = \int_{-r}^{r} dz \, \frac{z^2}{(z^2+4)}$

$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)^2}$ ist auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$ holomorph

$$\int_{\gamma_r} dz \, f(z)$$

$(z^2+4)^2 = (z-2i)^2 (z+2i)^2$

$$\gamma_r(t) = \begin{cases} \beta_r(t) = r e^{i\pi t}, & \forall t \in [0,1] \\ \alpha_r(t) = r(t-1) - (2-t) r, & \forall t \in (1,2] \end{cases}$$




$\gamma_r : [0,2] \longrightarrow \mathbb{C}$

genaue Kurvendarstellung nicht notwendig

$$\int_{\gamma_r} dz \, f(z) = \underbrace{\int_{\alpha_r} dz \, f(z)}_{:= I_r} + \underbrace{\int_{\beta_r} dz \, f(z)}_{:= J_r}$$

Residuensatz:

$$\int_{\gamma_r} dz \, f(z) = 2\pi i \left( \mathrm{Res}(f, 2i) + \cancel{\mathrm{Res}(f, -2i)} \right)$$

$$\mathrm{Res}(f, 2i) = \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dz^j} \left( (z-2i)^{j+1} f(z) \right)$$

$$\int_{\gamma_r} dz \, \frac{g(z)}{(z-a)^{n+1}} = 2\pi i \, \frac{g^{(n)}(a)}{n!}$$

$f(z) = \frac{z^2}{(z-2i)^2 (z+2i)^2} = \frac{g(z)}{(z-2i)^2}$ , $g : \mathbb{C} \setminus \{-2i\} \to \mathbb{C}$ hol.

$$\int_{\gamma_r} dz \frac{g(z)}{(z-2i)^2} = \frac{2\pi i}{1!} g'(2i) = \frac{\pi}{4} = \int_{\gamma_r} dz\, f(z)$$

Cauchy-Int. formel: $g'(z) = \frac{2z}{(z+2i)^2} - \frac{2z^2}{(z+2i)}$

$$g'(2i) = \frac{1}{8i}$$

$$\int_{\gamma_r} dz\, f(z) = \frac{\pi}{4} = I_r + J_r$$

$$|J_r| = \left| \int_{\beta_r} dz \frac{z^2}{(z^2+4)^2} \right| \leq \int_{\beta_r} dz \frac{|z|^2}{|z^2+4|^2}$$

$\Delta$-Ungl.: $0 < |z^2| - 4 \leq |z^2+4|$, $|z| = r > 2$

$$|J_r| \leq \int_{\beta_r} dz \frac{|z|^2}{(|z|^2-4)^2} \quad , \quad \beta_r(t) = re^{i\pi t}, \; t \in [0,1]$$

$$\leq \int_0^1 dt \frac{|re^{i\pi t}|^2}{(|re^{i\pi t}|^2-4)^2} \, |i\pi r e^{i\pi t}|$$

**Allgemein**

$$\int_{\beta_r} f(z)\, dz = \int_I dt\, f(\beta_r(t))\, \beta_r'(t)$$

$$\leq \int_0^1 dt \frac{r^2 \pi}{(r^2-4)^2} = \frac{1}{r} \frac{\pi}{\left(1-\frac{4}{r^2}\right)^2} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{r\to\infty} |J_r| = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} J_r = 0$$

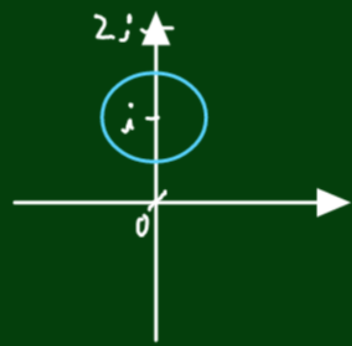
A4) für $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1,3\}$, $\gamma_r = B_r(i)$

$$\int dz \, \frac{1}{z^2(z^2+4)} \quad , \quad f(z) = \frac{1}{z^2(z^2+4)}$$

Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2+4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{(z-2i)(z+2i)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{z-2i} - \frac{1}{z+2i}\right)\right)$$




(i) $0 < r < 1$ $\quad \gamma_r = B_r(i)$

$$\int_{\gamma_r} f(z) \, dz = 0 \text{, da } f \text{ auf } B_r(i) \text{ holom.}$$

(ii) $1 < r < 3$ :

$\{2i, 0\} \in B_r(i)$

$$\int_{B_r(i)} dz \, f(z) = \underbrace{\int_{B_r(i)} dz \, \frac{1}{4z^2}}_{=0 \text{, da Pol 2-ter Grad}} - \frac{1}{16i} \int dz \, \frac{1}{z-2i} + \frac{1}{16i} \int_{B_r(i)} dz \, \frac{1}{z+2i}$$

$$= -\frac{1}{8}\pi$$

(iii) $\displaystyle \int_{B_r(i)} dz \, f(z) = \frac{1}{16i}(-2\pi i + 2\pi i) = 0$

# Blatt 8

## Definitionen

- **Mengenring** $\mathcal{R}$: $\Omega$ sei Menge, $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ist Mengenring, wenn:
  (i) $\emptyset \in \mathcal{R}$, (ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$
  (iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$
- **Mengenalgebra**: $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ auf $\Omega$
  (i) $\emptyset \in \mathcal{U}$ (ii) $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$ (iii) $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{U}$

nicht relevant

- **σ-Algebra**: $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ auf $\Omega$, falls gilt:
  (i) $\emptyset \in \mathcal{U}$ (ii) $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$
  (iii) $\forall$ Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ gilt $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{U}$

$$\boxed{\text{Mengenring} \Leftarrow \text{Mengenalgebra} \Leftarrow \sigma\text{-Algebra}}$$

**A1)** $f: U \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holom. und $a$ ein Pol $n$-ter Ordnung

so gilt: $\boxed{\operatorname{Res}(f, a) = \dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}}$ $\qquad g(z) = (z-a)^n f(z)$

**Beweis**: aus VS: $\exists r > 0$, sodass $\forall z \in B_r(a) \setminus \{a\}$

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k \qquad \text{Allgemein: } \operatorname{Res}(f, a) = a_{-1}$$

$$f(z) = \frac{(z-a)^n}{(z-a)^n} \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k = \frac{1}{(z-a)^n} \overbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{j-n} (z-a)^j}^{:= g(z)} \qquad j = k+n$$

wobei $g(z)$ holom. auf $B_r(a)$

$$g(z) = (z-a)^n f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j-n} (z-a)^j$$

$$g^{(n-1)}(z) = \left( \sum_{j=n-1}^{\infty} g_{j-n} \; j(j-1)\cdots(j-n+2)\,(z-a)^{j-(n-1)} \right) \Bigg|_{z=a}$$

$$= a_{n-1-n}\,(n-1)(n-2)\cdots 2 = a_{-1}\,(n-1)!$$

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f,a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

mit $d_z^3(z^5) = 5 \cdot 4 \cdot 3\, z^{5-3}$

$$\int_{\partial B_\rho(a)} dz\, f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a) = \int_{\partial B_\rho(a)} dz\, \frac{g(z)}{(z-a)^n}$$

falls $g(z)$ holom. $\quad \ldots = 2\pi i \dfrac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$

auf $B_r(z)$ $\quad 0 < \rho < r$

<u>A2)</u> $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\quad M \in \mathcal{U} \iff M$ oder $M^c$ höchstens abzählbar

(i) $\emptyset \in \mathcal{U} \Leftarrow \emptyset$ abzählbar, $\emptyset^c = \Omega$

(ii) $A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$ per Def.:

Falls $A$ abzählb. $\Rightarrow A \in \mathcal{U} \Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$

(iii) $\forall (A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ gilt $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{U}$

<u>1. Fall</u>: alle $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abzählb. $\Rightarrow A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{U}$

da eine abzb. Vereinig. von abzb. Mengen wieder abzb ist.

<u>2. Fall:</u> mind. ein Folgenglied <u>nicht abzb.</u>

also $A_j$ nicht abzb. aber $A_j^c$ abzb. $( A_j^c \in \mathcal{U} )$

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ nicht abzb. wegen $A_j$, $j \in \mathbb{N}$

$A^c = \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcap_{k=1} A_k^c \subset A_j^c \longrightarrow$ abzb.

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{U}$

<u>A3,</u> <u>Cantor - Menge C</u> $\qquad I := [0,1]$

$A$ abzb. $\Rightarrow$ $A$ ist zum Lebesguemaß eine Nullmenge $\lambda(A) = 0$
aber gilt "$\Leftarrow$" ? Nein siehe A3

$n=1$ : $I_{1,1} = [0, \frac{1}{3}]$ $\qquad I_{1,2} = [1 - \frac{1}{3}, 1]$

$n=2$ : $I_{2,1} = [0, \frac{1}{3^2}]$ $\qquad I_{2,2} = [\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3}]$

$I_{2,3} = [1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}]$ $\qquad I_{2,4} = [1 - \frac{1}{3^2}, 1]$

$n=3$ : $I_{2,1} = [0, \frac{1}{3^2}]$

$I_{3,1} = [0, \frac{1}{3^3}]$ $\qquad I_{3,2} = [\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^2}]$

$I_{2,2} = [\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3}]$

$I_{3,3} = [1/3 - 1/3^2, 1/3 - 1/3^2 + 1/3^2]$ $\qquad I_{3,4} = [1/3 - 1/3^3, 1/3]$

Iterationsschritt:

$$I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}]$$

$$I_{n+1,2j-1} = [a_{n,j}, a_{n,j} + 1/3^{n+1}] \qquad I_{n+1,2j} = [b_{n,j} - 1/3^{n+1}, b_{n,j}]$$

$$= [a_{n+1,2j-1}, b_{n+1,2j-1}] \qquad = [a_{n+1,2j}, b_{n+1,2j}]$$

$$C_n = \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j} \xrightarrow{n \to n+1} C_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{2^n} (I_{n+1,2j-1} \cup I_{n+1,2j})$$

$$= \bigcup_{j=1}^{2^{n+1}} I_{n+1,j}$$

Cantor-Menge $C = \lim_{n \to \infty} C_n$

$C$ ist überabzh., d.h. $\forall$ Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I$ $\exists z \in I$, sodass $z \neq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (Cantor – Diagonalverfahren)

Betrachte $I = [0,1]$

Sei $x_1 = 0{,}a_{11}\ a_{12} \cdots$

$x_2 = 0{,}a_{21}\ a_{22} \cdots$

$\vdots$

$x_n = 0{,}a_{n1}\ a_{n2} \cdots$

Konstruiere $z = 0{,}z_1\ z_2 \cdots z_n$ mit $z_j \begin{cases} a_{jj} - 2, & a_{jj} \geq 5 \\ a_{jj} + 2, & a_{jj} \leq 5 \end{cases}$

$$|z - x_n| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} (z_j - a_{nj}) 10^{-j} \right|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n-1} (z_j - a_{nj}) 10^{-j} + (z_n - a_{nn}) 10^{-n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} (z_j - a_{nj}) 10^{-j} \right|$$

$$\geq \left| \sum_{j=1}^{n-1} (z_j - a_{nj}) 10^{-j} + (z_n - a_{nn}) 10^{-n} \right| - \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} (z_j - a_{nj}) 10^{-j} \right|$$

$$\geq |z_n - a_{nn}| 10^{-n} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \underbrace{|z_j - a_{nj}|}_{\leq 9} 10^{-j}$$

$$|z - x_n| \geq \underbrace{|z_n - a_{nn}|}_{=2} 10^{-n} - 9 \sum_{j=n+1}^{\infty} 10^{-j}$$

$$\geq 2 \cdot 10^{-n} - 9 \frac{10^{-(n+1)}}{9/10}$$

$$\geq 2 \cdot 10^{-n} - 10 \cdot 10^{-n-1} = 10^{-n}$$

$|z - x_n| \geq 10^{-n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow z \neq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow I = [0,1]$ ist überabzb.

Betrachte: $g : I_{n,j} = [a_{n,j}, b_{n,j}] \longrightarrow I = [0,1]$

$g(x) = \dfrac{x - a_{n,j}}{b_{n,j} - a_{n,j}}$ ist bijektiv

aus Surjektivität folgt: $\quad g(I_{n,j}) = [0,1]$

$\Rightarrow I_{n,j}$ überabzb. $\forall n, j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow C = \lim\limits_{n \to \infty} C_n$ überabzb.

- Lebesguemessbar: eine Teilmenge $X$ ist Leb.-messb., wenn

$X \in \mathcal{L} \leftarrow$ vollst. Borelalgebra (ist auch eine $\sigma$-Algebra)

(vollständige Borelalgebra bedeutet: alle Nullmengen $S \in \mathcal{L}$)

Da $I_{n,j}$ $\forall n,j \in \mathbb{N}$ offen $\Rightarrow I_{n,j} \in \mathcal{L}$ $\forall n,j \in \mathbb{N}$

$$C = \bigcup_{j=1}^{\infty} \underbrace{I_{\infty,j}}_{\in \mathcal{L}} \in \mathcal{L} \text{ (aus (iii))}$$

- Lebesguemaß:

$$\lambda(C) \underset{\sigma\text{-add.}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{2^n} \underbrace{\lambda(I_{n,j})}_{=1/3^n} = \lim \sum_{j=1}^{2^n} 1/3^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

$$\lambda(C) = \lambda\left(\lim_{n\to\infty} C_n\right) \underset{\substack{\text{Stetigkeit} \\ \text{von unten}}}{=} \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Beispiel zu Maßen: nicht relevant

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine Mengenalgebra mit

$M \in \mathcal{U} \iff M$ oder $M^c$ endlich

Sei $\mu : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_+$ def durch $\mu(M) = \sum_{n\in M} \frac{1}{n^2}$ falls $M$ endl.

$\mu(M) = 2 - \sum_{n \in M^c} 1/n^2$ falls $M^c$ endl.

ist $\mu$ ein Prämaß, d.h. $\mu$ ein Inhalt und $\sigma$-additiv.

(def auf Mengenring)

$\sigma$-additiv : $\mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$

$A = \mathbb{N} \quad \mathbb{N} \in \mathcal{U} \Longrightarrow \mathbb{N}^c = \emptyset \in \mathcal{U}$ da $\emptyset$ endl.

$$\mu(\mathbb{N}) = 2 - \sum_{n \in \emptyset} 1/n^2 = 2$$

$$\mu(\mathbb{N}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left( \sum_{n \in \{k\}} 1/n^2 \right)}_{=1/k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \frac{\pi}{6} \neq 2$$

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\}$$

$\Rightarrow$ $\mu$ nicht $\sigma$-additiv !

aber $\mu$ ein Inhalt

# Blatt 9

**$\sigma$-Algebra** $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\Omega)$

(i) $\emptyset \in \mathcal{U}$

(ii) $E \in \mathcal{U} \Rightarrow E^c \in \mathcal{U}$

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U} \Rightarrow A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{U}$

**Äußeres Maß** $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ (Monotonie)

(iii) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega) \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i)$ (Subadditivität)

$\underline{A1)}$ $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $M \subset \Omega$

$E \in \mathfrak{A} \iff E \subset M$ oder $E^c \in M$

$\sigma$-Algebra:

(i) $\emptyset \subset M \Rightarrow \emptyset \in \mathfrak{A}$

(ii) $E \in \mathfrak{A} \Rightarrow E \subset M$ oder $E^c \subset M \Rightarrow (E^c)^c \subset M$ oder

$E^c \in M \Rightarrow E^c \in \mathfrak{A}$

(iii) Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ und $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{A}$

1. Fall: $\forall A_i \subset \Omega$ $\forall i \in \mathbb{N}$ gilt $A_i \subset M$

$\Rightarrow A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subset M \Rightarrow A \in \mathfrak{A}$

2. Fall: $\exists j \in \mathbb{N}$, sodass $A_j \not\subset M \Rightarrow A_j^c \subset M$ (da $A_j \in \mathfrak{A}$)

$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \not\subset M$

$A^c = (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i)^c = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i^c \subset A_j^c \subset M \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$

$\square$

Gegenbeispiel zu $\sigma$-Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Sei $\mathfrak{A}$ def. als: $E \in \mathfrak{A} \iff E$ oder $E^c$ endlich

z.z. $\mathfrak{A}$ keine $\sigma$-Alg:

(iii) $(\{2n\})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{A} \Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n\}$ nicht

endlich $\Rightarrow A \notin \mathfrak{A}$

$A^c = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2n+1\} \Rightarrow A^c$ nicht endlich $\Rightarrow A^c \notin \mathcal{U}$

$\Rightarrow \mathcal{U}$ ist keine $\sigma$-Alg

$A \cap B \subset A$ bzw. $A \cap B \subset B$

Falls $\Omega$ $(\subset \mathbb{N})$ endlich $\Rightarrow \mathcal{U}$ ist eine $\sigma$-Alg.

A2) $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit $A \subset \mathbb{R}$

$\lambda(A) := \sup(\{0\} \cup \{|f(\omega)| : \omega \in A\}$ wobei die

Fkt. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) z.z.: $\lambda$ ist äußeres Maß

(i) $\lambda(\emptyset) = \sup(\{0\} \cup \{|f(\omega)| : \omega \in \emptyset\}) = 0$

(ii) (Monotonie) Sei $A \subset B$ :

$$\sup(\{|f(\omega)| : \omega \in A\} \cup \{0\}) \leq \sup(\{|f(\omega)| : \omega \in B\} \cup \{0\})$$

$\lambda(A) \leq \lambda(B)$

(iii) (Subadditiv) Sei $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$\lambda\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sup(\{0\} \cup \{|f(\omega)| : \omega \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\}$$

$$\overset{(*)}{\leq} \sum_{i\in\mathbb{N}} \sup\{|f(\omega)| : \omega \in A_i\} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$$

zu (*): Sei $x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Dann $\exists j \in \mathbb{N}$ sodass $x \in A_j$. So gilt

$|f(x)| \leq \sup(\{|f(\omega)| : \omega \in A_j\})$

$|f(x)| \leq \ldots \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \sup(\{|f(\omega)| : \omega \in A_i\}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda(A_i)$

Dies gilt $\forall x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \Rightarrow \lambda$ ist äußeres Maß

b) Welche Teilmengen von $\mathbb{R}$ messbar für $\sin(x) = f(x)$

Aus Vorlesung:

Sei $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}^+$ ein äußeres Maß und $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ eine $\sigma$-Alg. Dann ist eine $E \subset \mathbb{R}$ mit $E \in \mathfrak{A}$, genau dann $\lambda$-messbar, falls für Teilmengen $B \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda(E \cap B) + \lambda(E^c \cap B) = \lambda(B)$$

Def $\sigma$-Alg $\mathfrak{A}$

Sei $M : \{2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in M$

$E \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow E \subset M$ oder $E^c \subset M$ (folgt aus A1)

Desweiteren gilt immer aus Subadditivität

$$\lambda(E \cap B) + \lambda(E^c \cap B) \overset{(iii)}{\geq} \lambda((E \cap B) \cup (E^c \cap B)) = \lambda(B)$$

$\Rightarrow$ Falls $\lambda(E \cap B) + \lambda(E^c \cap B) \leq \lambda(B)$

$\Rightarrow E$ messbar (falls $E \in \mathfrak{A}$)

1. Annahme: $E \subset M$ und $B \subset \mathbb{R}$ (beliebig)

$$\underbrace{\lambda(\underbrace{E \cap B}_{\subset M})}_{=0} + \lambda(\underbrace{E^c + B}_{\subset B}) \leq \lambda(B) \Rightarrow E \text{ messbar}$$

2. Annahme: $E^c \subset \mathcal{M}$ und $B \subset \mathbb{R}$ beliebig

$$\lambda(E \cap B) + \lambda(\underbrace{E^c \cap B}_{\subset \mathcal{M}}) = \lambda(E \cap B) \leq \lambda(B)$$

$\Rightarrow$ $E$ messbar

3. Annahme: $A \not\subset \mathcal{M}$ und $A^c \not\subset \mathcal{M}$. Somit besitzt $A$ (bzw. $A^c$) ein Element $x \in A$ (bzw. $y \in A^c$) mit $x \notin \mathcal{M}$ ($y \notin \mathcal{M}$)

Sei $B = \{x, y\}$

$$\lambda(A \cap B) + \lambda(A^c \cap B) = \lambda(\{x\}) + \lambda(\{y\}) = |f(x)| + |f(y)|$$
$$> \max\{|f(x)|, |f(y)|\} = \lambda(B)$$

$\Rightarrow \lambda(A \cap B) + \lambda(A^c \cap B) > \lambda(B)$

$\Rightarrow$ $A$ nicht messbar

$\Rightarrow$ Nur Elemente aus $\mathfrak{U}$ sind messbar

Die Borel-Algebra $\mathcal{B}$ wird von allen offenen Intervallen aus $\mathbb{R}^n$ erzeugt. (Eine beschränkte Menge ist nicht zwingend in der Borel-Algebra)

A3

Sei nun $\mathcal{L}'$ die Algebra, die aus abgeschl. Intervallen aus $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird

Sei nun $n=1$

Beweisidee: $\left.\begin{array}{l}(i)\ \mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \\ (ii)\ \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}\end{array}\right\} \mathcal{L} = \mathcal{L}'$

(ii) $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ Sei $a,b \in \mathbb{R}$ $[a,b] \in \mathcal{L}'$

$[a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[$

$\Rightarrow [a,b] \subset \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$

(i) Sei $a,b \in \mathbb{R}$ $]a,b[ \in \mathcal{L}'$

$]a,b[ = \mathbb{R} \setminus (]-\infty,a] \cup [b,\infty[) =$

$= (\mathbb{R}\setminus ]-\infty,a]) \cap (\mathbb{R}\setminus [b,\infty[)$

$= (]-\infty,a])^c \cap ([b,\infty[)^c$

$= \left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ -n<a}} [-n,a]\right)^c \cap \left(\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n>b}} [b,n]\right)^c$

$\Rightarrow ]a,b[ \in \mathcal{L}' \Rightarrow \mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}'$

A4) $\mathfrak{A}$ $\sigma$-Alg, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}$, $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$

a) Sei $X$ Menge mit $\omega \in X$ falls $\omega \in A_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$

b) Sei $Y$ Menge mit $\omega \in Y$ falls $\omega \in A_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$

a) (i) $X \subset \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{\substack{k>n \\ k\in\mathbb{N}}} A_k \right)$

(ii) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{\substack{k>n \\ k\in\mathbb{N}}} A_k \right) \subset X$

$\Big\}\ X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{\substack{k>n \\ k\in\mathbb{N}}} A_k \right)$

(i) Sei $\omega \in X$. Aus Def. gilt

$\forall\, \omega \in X$ gilt: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, k_n \in \mathbb{N}$ sodass $\forall k_n > n$

$\omega \in A_{k_n}$

Falls dies nicht der Fall, würde $\omega \in X$ nur in endl. vielen $A_n$ liegen $\Rightarrow$ $\lightning$ Def

$\Rightarrow \omega \in \bigcap_{k_n, n\in\mathbb{N}} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{\substack{k>n \\ k\in\mathbb{N}}} A_k \right)$

wegen $A_{k_n} \subset \bigcup_{\substack{k>n \\ k\in\mathbb{N}}} A_k \Rightarrow$ (i)

(ii) Sei $\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{\substack{k>n \\ k\in\mathbb{N}}} A_k \right)$

$\Rightarrow \omega \in \bigcup_{\substack{k>n \\ k\in\mathbb{N}}}^{n} A_k \Rightarrow$ nach Def von $X$ gilt $\omega \in X \Rightarrow$ (ii)

$$(i) \wedge (ii) \implies X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big( \underbrace{\bigcup_{\substack{k > n \\ k \in \mathbb{N}}} A_k}_{\in \mathfrak{A}} \Big) \implies X \in \mathfrak{A}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} (i) \quad Y \subset \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j < n}} A_n \\[2em] (ii) \quad \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j < n}} A_n \subset Y \end{array}\right\} \quad Y = \underbrace{\bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ j < n}} A_n}_{\in \mathfrak{A}} \implies Y \in \mathfrak{A}$$

Beweis analog zu a)

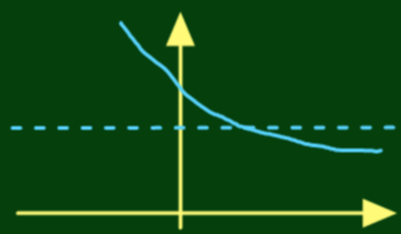
# Blatt 10

- Massbare Fkt.:
  - stetige Fkt.
  - Indikatorfkt. messbarer Mengen $\mathbb{1}_A$

**A1)** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ messbarer Fkt. $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\geq n} f_k(x)\Big)$$

zeige: $f^{-1}\big((-\infty, a)\big)\in\mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall a\in\mathbb{R}$



Bew.: $x\in f^{-1}\big((-\infty,a)\big) \iff f(x)<a$

$$\iff \inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(\sup_{k\geq n} f_k(x)\Big) < a$$

$$\iff \exists\, n\in\mathbb{N}: \sup_{k\geq n} f_k(x) < a$$

$$\iff \exists\, n\in\mathbb{N}\ \exists\,\varepsilon>0: \sup_{k\geq n} f_k(x)\leq a-\varepsilon$$

$$\iff \exists\,\varepsilon>0\ \exists\, n\in\mathbb{N}\ \forall k\geq n: \underbrace{f_k(x)\leq a-\varepsilon}_{x\in f_k^{-1}((-\infty,\, a-\varepsilon])}$$

$$\iff x\in \bigcup_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\in\mathbb{Q}}}\underbrace{\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\Big(\bigcap_{k\geq n} f_k^{-1}\big(\underbrace{(-\infty,\, a-\varepsilon]}_{}\big)\Big)}_{\in\mathcal{B}}\Big)}_{\in\mathcal{B}} \in\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$\uparrow$ $\varepsilon\in\mathbb{Q}$ gewählt!

$\in\mathcal{B}$

Haben: $f^{-1}(\underbrace{(-\infty, a)}_{\text{Erzeuger von } \mathcal{B}(\mathbb{R}) := \overset{!}{\sigma}(\{\underbrace{(a,b)}_{\text{auch } [a,b] \text{ oder } (-\infty, a)} : a, b \in \mathbb{R}\})}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

brauchen: $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$B = \bigcap_n \bigcup_m A_{m,n} \qquad f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\bigcap_n \bigcup_m A_{m,n}\right) = \bigcap_n \bigcup_m f^{-1}(A_{m,n}) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\mathcal{G} := \{E \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(E) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$,

zeige: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{G} \iff \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G} \overset{!}{=} \sigma(\mathcal{G}) \qquad \mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$

mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \quad \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$

zeige: $\mathcal{G}$ $\sigma$-Alg

<u>Bew.</u>: • $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

• $A \in \mathcal{G} \Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f^{-1}(A^c) = (\underbrace{f^{-1}(A)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})})^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{G}$

• $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow f^{-1}(A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(A_n)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{G}$

„$\subseteq$", „$\supseteq$"

<u>Bek:</u> $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$, $\omega \in f^{-1}(A^c) \iff \omega \in (f^{-1}(A))^c$

$\iff \omega \notin f^{-1}(A) \iff f(\omega) \notin f(A)$

A3, a) $\delta_a : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ , $A \mapsto \delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

zeige: $\delta_a$ Maß

Bew.: • $\delta_a(\emptyset) = 0$

• $\sigma$-Add.: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ paarw. disj., zeige

$$\delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_a(A)$$

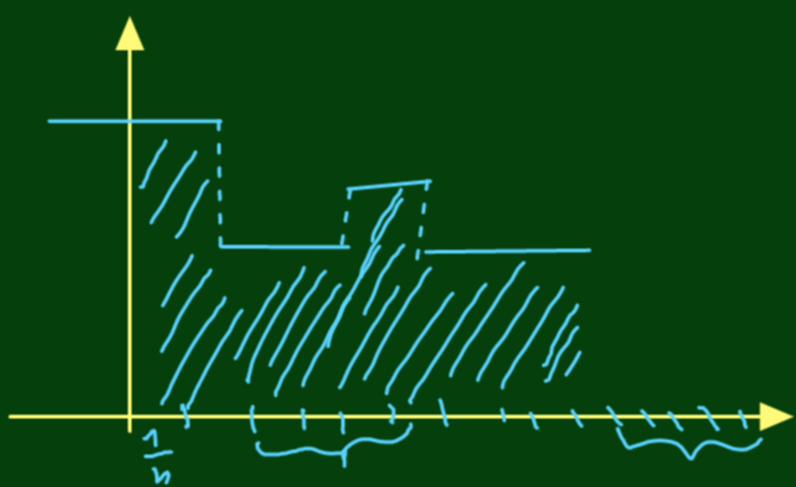
1. Fall: $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \exists!\ n_0 : a \in A_{n_0} \Rightarrow \delta_a(A_n) = \delta_{n,n_0}$

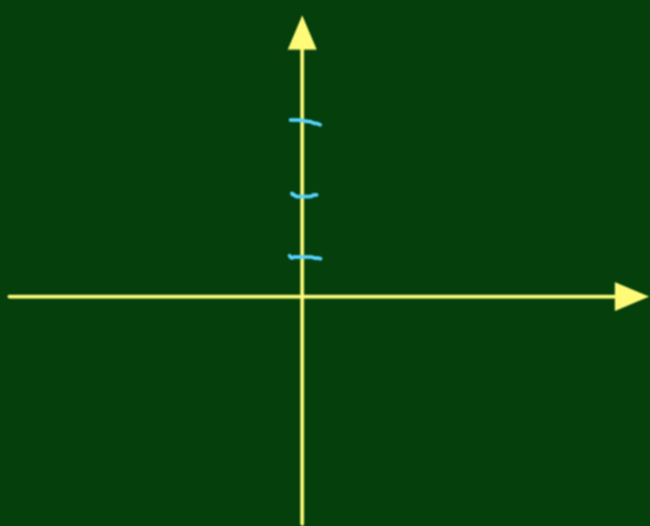
$\Rightarrow \delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{n,n_0} = 1$

2. Fall: $a \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Rightarrow \delta_a\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$ ,

$a \notin A_n\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\delta_a(A_n)}_{0} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$

zu Lebesgue-Integral:



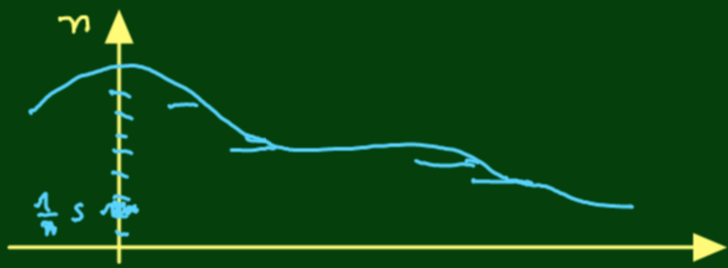



"einfache Fkt.": $\sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$

$A_k$ paarw. disj., $\bigcup A = \mathbb{R}$

$\mu$ Maß : $\int \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k} \, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mu(A_k)$

$f \geq 0$ messbar




$f_n := \sum_{k=0}^{n^{2}-1} \frac{k}{n} \cdot \mathbb{1}_{f^{-1}([\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}])}$

einfache Fkt, $f_n(x) \nearrow f(x) \; \forall x$

$\int f \, d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu$

$\Rightarrow$ $f$ messb., $f = f^+ - f^- = f \cdot \mathbb{1}_{\{x : f(x) \geq 0\}} - \left(-f \cdot \mathbb{1}_{\{x : f(x) < 0\}}\right)$

$\int f = \int f^+ - \int f^-$

b) ges.: $\int f \, d\delta_a = f(a)$

Bew.: Sei $g = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{1}_{A_k}$ einfach

$$g(a) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \underbrace{\mathbb{1}_{A_k}(a)}$$

$$\int g \, d\delta_a = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \overbrace{\delta_a(A_k)}^{=}$$

Sei $f \geq 0$ messbar, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einfache Fkt. $f_n \nearrow f$

$\int f \, d\delta_a = \sup_n \int f_n \, d\delta_a = \sup_n f_n(a) = f(a)$

allg. $f$ messbar, $f = f^+ - f^-$ $\Rightarrow \ldots$

A2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$

geg.: $\lambda(A) = 0$

zeige: $\int_B f \, d\lambda = \int_B g \, d\lambda \quad \forall B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$

Bew.: $\int_B f \, d\lambda = \int f \cdot \underset{\underset{\mathbb{1}_{B \setminus A} + \mathbb{1}_{B \cap A}}{\parallel}}{\mathbb{1}_B} \, d\lambda = \int f \, \mathbb{1}_{B \setminus A} \, d\lambda + \underbrace{\int f \cdot \mathbb{1}_{B \cap A} \, d\lambda}_{0 \leq \lambda(B \cap A) \leq \lambda(A) = 0}$

$= \int g \, \mathbb{1}_{B \setminus A} \, d\lambda + \int g \cdot \mathbb{1}_{B \cap A} \, d\lambda = \int_B g \, d\lambda$

zeige: $f$ messbar, $\lambda(N) = 0 \Rightarrow \int f \, \mathbb{1}_N \, d\lambda = 0$

$f = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}$, $\int f \, \mathbb{1}_N \, d\lambda = \int \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbb{1}_{A_k \cap N} \, d\lambda =$

$= \sum_{k=1}^n a_k \cdot \underbrace{\lambda(\underbrace{A_k \cap N}_{\subseteq N})}_{=0} = \sum_{k=1}^n 0 = 0$

Rest: sup

2. Variante zu A2:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-intbare Fkt. und $A$ sei Lebesgue-Nullmenge, d.h. $A \subset \mathbb{R}$, $\lambda(A) = 0$, wobei $\lambda$ äußeres Maß ist. Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) \; \forall x \notin A$

zeige: $\int_B g(x) \, dx = \int_B f(x) \, dx \quad \forall B \in \mathcal{L}$

Beweis: A eine Nullmenge, so gilt $\forall g$, die nicht negativ:

$$\int_A g(x)\,dx \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} c_j \lambda\left(g^{-1}([j-1,j]) \cap A\right)$$

wobei $c_j := \sup\left(\{g(x) : x \in (g^{-1}([j-1,j]) \cap A)\} \cup \{0\}\right) \leq j$

$$\int_A g(x)\,dx \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} j \lambda\left(\underbrace{g^{-1}([j-1,j]) \cap A}_{\subset A}\right)$$

Monotonie von $\lambda$

$$\leq \sum_{j\in\mathbb{N}} j \underbrace{\lambda(A)}_{=0} = 0$$

Somit gilt $\forall\ g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (intbare Fkt.)

$$\int_A g(x)\,dx = \int_A g_+(x) - g_-(x)\,dx = \underbrace{\int_A g_+\,dx}_{=0} - \underbrace{\int_A g_-\,dx}_{=0}$$

$$g_+(x) = \sup(g, 0) \geq 0 \qquad g_-(x) = \sup(-g, 0) \geq 0$$

$$\int_B g\,dx = \underbrace{\int_{B\cap A} g\,dx}_{=0} + \int_{B\setminus A} g\,dx \overset{\text{aus V.S.}}{=} \int_{B\setminus A} f\,dx =$$

$$= \int_{B\setminus A} f\,dx + \underbrace{\int_{B\cap A} f\,dx}_{=0} = \int_B f\,dx \quad \forall\ B \in \mathcal{B}$$

Blatt 11 | zur Klausur:

- keine Hilfsmittel

A1)

$X : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad Y : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Omega_1 := \{1, \dots, \underset{\overset{\shortparallel}{6}}{n}\}$ $\qquad \Omega_2 := \{1, \dots, \underset{\overset{\shortparallel}{6}}{m}\}$

Für die Aufg. reicht $n = m = 6$

Kovarianz:

- $Cov(X,Y) > 0 \implies$ je größer Wert von X desto größer W.v. Y
- $Cov(X,Y) < 0 \implies$ je kleiner " — "
- $Cov(X,Y) = 0 \implies$ kein monotoner Zusammenhang

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) =$$

$$= \mathbb{E}\big(XY + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X\big) =$$

$$= \mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\underbrace{\mathbb{E}(1)}_{=1} - 2\,\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) =$$

$$= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$(X \pm Y): \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{Cov}(X+Y, X-Y) = \mathbb{E}\big((X+Y)(X-Y)\big) - \mathbb{E}(X+Y)\,\mathbb{E}(X-Y)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\big)\big(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\big) =$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 - \big(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2\big) =$$

$$= \operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y) = \frac{n^2 - m^2}{12} \overset{n=m}{=} 0$$

$$\text{mit } \operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\right)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{n\,6} - \left(\frac{n\,(n+1)}{n\,2}\right)^2 = \quad \ldots \quad =$$

$$= \frac{(n+1)\big(2(2n+1) - (n+1)3\big)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

A: $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ B: $\mathbb{P}(X \cap Y) = \mathbb{P}(X)\,\mathbb{P}(Y)$

$X, Y$ unabh.

$B \to A \iff \neg A \longrightarrow \neg B$

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(\omega_1 \times \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} X(\omega_1)\, Y(\omega_2)\, \underbrace{\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\})}_{\mathbb{P}(\omega_1 \cap \omega_2)} =$$

$$\overset{B}{=} \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} X(\omega_1)\, Y(\omega_2)\, \mathbb{P}(\omega_1)\, \mathbb{P}(\omega_2) =$$

$$= \sum_{\omega_1 \in \Omega_1} X(\omega_1)\, \mathbb{P}(\omega_1) \sum_{\omega_2 \in \Omega_2} Y(\omega_2)\, \mathbb{P}(\omega_2) =$$

$$= \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = \operatorname{Cov}(X,Y) = 0$$

$B \to A \iff \neg A \longrightarrow \neg B$ (*)

b) $\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, \dots, n\}$ Falls $\Omega_1 \neq \Omega_2$ bzw. $n \neq m$ folgt aus ⊛ Abhängigkeit

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \frac{1}{n^2} \quad \forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2$

$\mathbb{P}((X+Y)^{-1}(2n) \cap (X-Y)^{-1}(0)) \overset{?}{=} \mathbb{P}((X+Y)^{-1}(2n)) \cdot$
$\cdot \mathbb{P}((X-Y)^{-1}(0))$

$(X+Y)^{-1}(2n) = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : (X+Y)(\omega_1, \omega_2) = 2n\}$
$= \{(n, n)\}$

$(X-Y)^{-1}(0) = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : (X-Y)(\omega_1, \omega_2) = 0\}$
$= \{(1,1), \dots, (n,n)\}$

$\mathbb{P}((X+Y)^{-1}(2n) \cap (X-Y)^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\{(n,n)\}) = \frac{1}{n^2}$

$\mathbb{P}((X+Y)^{-1}(2n)) \cdot \mathbb{P}((X-Y)^{-1}(0)) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^3} \neq \frac{1}{n^2}$

$\Rightarrow$ $(X+Y)$ und $(X-Y)$ <u>nicht</u> unabh.

aus a) $\mathrm{Cov}(X+Y, X-Y) = 0$ für $n = m$

$\Rightarrow$ $(X+Y)$ $(X-Y)$ abhängig sind

$B \longrightarrow A \iff \neg A \longrightarrow \neg B \equiv \mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X \cap Y) \neq \mathbb{P}(X) \cdot \mathbb{P}(Y) \qquad A \not\Rightarrow B$

A2) a) ① $\mathbb{E}(X) > 100\,\mathbb{E}(Y)$ ② $\mathbb{P}(Y-X>0) \geq 0{,}99$

Ja: Betrachte $\Omega = \{1, \dots, 100\}$

$X: \Omega \to \{0, 10^6\}$ $\qquad$ $Y: \Omega \to \{1\}: \omega \mapsto 1$

$Y(\omega) = 1$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \forall \omega \neq \{100\} \\ 10^6, & \omega = \{100\} \end{cases}$$

$\mathbb{P}: \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{100} \quad \forall \omega \in \Omega$

$\mathbb{E}(X) = 0 + 10^6 \cdot \frac{1}{100} = 10^4$ $\qquad$ $\mathbb{E}(Y) = 1$

$\Rightarrow$ ① $\mathbb{E}(X) > \mathbb{E}(Y) \cdot 100$ ✓

$\mathbb{P}(Y - X \geq 0) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : Y - X \geq 0\}) =$

$= \mathbb{P}(\{1, \dots, 99\}) = \frac{99}{100}$ ② ✓

b)

$\mathbb{P}(|X| > 1) > \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}(X^2) \neq \frac{1}{2}$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{\omega \in \Omega} X^2(\omega)\, \mathbb{P}(\{\omega\}) \overset{(3a)}{=} \sum_{a \in X(\Omega)} a^2\, \mathbb{P}(X = a)$$

$$= \overbrace{\sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ |a| < 1}} a^2\, \mathbb{P}(X = a)}^{\geq 0} + \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ |a| \geq 1}} a^2\, \mathbb{P}(X = a)$$

$$\geq \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ |a| \geq 1}} a^2\, \mathbb{P}(X = a) \geq \sum_{\substack{a \in X(\Omega) \\ |a| \geq 1}} \mathbb{P}(X = a) \geq \mathbb{P}(|X| \geq \tfrac{1}{2}) > \tfrac{1}{2}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) > \frac{1}{2}$ ✓ mit $\mathbb{P}(X=a) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\})$

A3) $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

a) $f(X) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \omega \longmapsto f(X(\omega))$

Da $X$ eine Fkt. gilt:

$\forall \omega \in \Omega \; \exists! \; a := X(\omega) \in X(\Omega)$

Allg.: $\mathbb{E}(Y) = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \, P(\{\omega\})$

Somit folgt $\sum_{\omega \in \Omega} = \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}}$

$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \, \mathbb{P}(\{\omega\}) =$

$= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a} f(X(\omega)) \, \mathbb{P}((\{\omega\}) =$

$= \sum_{a \in X(\Omega)} \sum_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a} f(a) \, \mathbb{P}(\{\omega\}) =$

$= \sum_{a \in X(\Omega)} f(a) \sum_{\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{a \in X(\Omega)} f(a) \, \mathbb{P}(X = a)$

b) 1. Möglichkeit siehe A1 mit $\Omega = \{1,2,3\}$

2. Möglichkeit: $\Omega = \{a, b, c\}$

$$X: \Omega \to \{-1, 0, 1\} \qquad \omega \mapsto X(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega = a \\ 0, & \omega = b \\ 1, & \omega = c \end{cases}$$

$$Y: \Omega \to \{0, 1\} \qquad \omega \mapsto Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = a \\ 1, & \omega = b \\ 0, & \omega = c \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{3} \quad \forall \omega \in \Omega$$ (da $\Omega$ ein Laplace-Raum)

$$\mathbb{E}(X) = (-1+0+1)\frac{1}{3} = 0 \qquad \mathbb{E}(Y) = (0+1+0)\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}(XY) = (-1\cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \cdot \frac{1}{3^2} = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$$

$X, Y$ abhängig:

$$\mathbb{P}(X^{-1}(0) \cap Y^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\{b\} \cap \{a, c\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(X^{-1}(0))\, \mathbb{P}(Y^{-1}(0)) = \mathbb{P}(\{b\}) \cdot \mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \neq 0$$

A4) Wkt.raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$

$X: \Omega \to \mathbb{N}_0$ ist Poisson-verteilt falls

$\exists \lambda > 0$ mit $P(X=k) = F_\lambda(k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

a) Normierung

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

b) $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1+1}{(k-1)!} \lambda^k =$$

$$= e^{-\lambda} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} \lambda^k + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)} \lambda^{k-1} \right) =$$

$$= e^{-\lambda} \left( \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} \lambda^{k-2} + \lambda e^{\lambda} \right) =$$

$$= e^{-\lambda} \left( \lambda^2 e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda} \right) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\Rightarrow \operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \;//$$

Blatt 12
- nächstes Tut. in B039
- restliche Blätter gibts in Vorlesung zurück

A1 a) $\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0,\infty) = [0,\infty)$

$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcap_{k\geq n} A_k \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,n] = [0,\infty)$

$\limsup_{n\to\infty} B_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcup_{k\geq n} B_k \right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [0,2] = [0,2]$

$\liminf_{n\to\infty} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcap_{k\geq n} B_k \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1] = [0,1]$

b) Sei $C_n$ eine bel. Mengenfolge

Zeige: $\liminf_{n\to\infty} C_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} C_n$

Sei $x$ beliebig mit $x \in \liminf_{n\to\infty} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left( \bigcap_{k\geq n} C_k \right)$,

so gilt: $\exists m \in \mathbb{N}$, sodass $x \in \bigcap_{k\geq m} C_k \Rightarrow x \in C_k, \forall k \geq m$

Sei $j = \max(m,n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$\Rightarrow x \in C_j$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{k\geq j} C_k \subseteq \left( \bigcup_{k\geq j} C_k \right) \cup \left( \bigcup_{j > k \geq n} C_k \right) = \bigcup_{k\geq n} C_k$

Da $n$ beliebig, folgt:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(\underbrace{\bigcup_{k\geq n} C_k}_{\ni x \ \forall n\in\mathbb{N}}\Big) =: \limsup_{n\to\infty} C_n \ni x$$

Da $x$ beliebig, folgt $\liminf_{n\to\infty} C_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} C_n$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \cap \underbrace{\bigcup_{k=2}^{\infty} C_k}_{\supset \bigcup_{k=m}^{\infty} C_k \ni x} \ldots \cap \underbrace{\bigcup_{k=m}^{\infty} C_k}_{\ni x} \cap \ldots$$

A2) a) zeige $\rho_\lambda$ ist Wkt.dichte, d.h.

(i) $\rho_\lambda(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ✓

(ii) $\rho_\lambda(x)$ messbar (bzw integrierbar nach Lebesgue-Maß)

$$\rho_\lambda^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

(iii) Normierung $\int_{\mathbb{R}} \rho_\lambda(x)\,dx = 1$

(iii) $\int_{\mathbb{R}} \rho_\lambda(x)\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty = -(-1) = 1$

$$\rho_\lambda(x) = \chi_{(0,\infty)}(x)\,\lambda e^{-\lambda x}, \quad \chi_{(0,\infty)}(x) := \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x\leq 0 \end{cases}$$

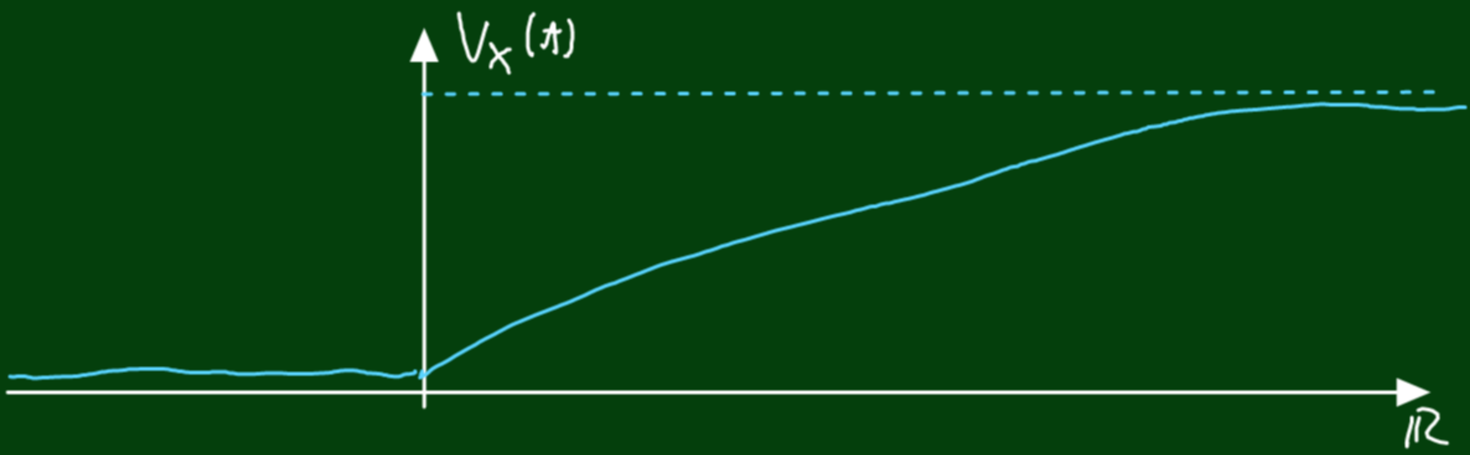
(ii) falls $\rho_\lambda$ stetig $\Rightarrow$ $\rho_\lambda$ messbar (hier nicht der Fall, $\rho_\lambda$ trotzdem messbar)

$\{x\in\mathbb{R} \mid \rho_\lambda(x) \leq c\} \in \mathfrak{A} \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$$\rho_\lambda^{-1}(\underbrace{(-\infty, c]}_{\in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})}) \in \mathfrak{A} \iff \rho_\lambda^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \quad \forall B \in \tilde{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$$

b) $V_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_\lambda(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ (1), & t > 0 \end{cases}$

(1) $\int_{-\infty}^{t} f_\lambda\,dx = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$




c) $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_\lambda(x)\,dx \overset{\text{P.I.}}{=} \underbrace{-x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{=0,\ x\to\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_\lambda(x)\,dx = \underbrace{-x^2 e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + 2\int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx =$$

$$= \underbrace{-2\, x e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

A3) Zufallsvariable $X$ geometrisch verteilt

$$\mathbb{P}(X=n) = p(1-p)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$X, Y$ unabh. & geom. vert. auf $\Omega$

$$Z(\omega) := \min(Y(\omega), X(\omega)) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$\mathbb{P}(Z(\omega) \geq n) = P(\min(X(\omega), Y(\omega)) \geq n)$$

$$= \mathbb{P}((X(\omega) \geq n) \cap (Y(\omega) \geq n)) = \mathbb{P}(X(\omega) \geq n) \cdot \mathbb{P}(Y(\omega) \geq n)$$

$$= \left(\sum_{k=n}^{\infty} p(1-p)^k\right)\left(\sum_{j=n}^{\infty} p(1-p)^j\right)$$

$$\mathbb{P}(Z(\omega) \geq n) = \left(\sum_{j=n}^{\infty} p(1-p)^j\right)^2 \overset{②}{=} \left(p\,\frac{(1-p)^n}{1-(1-p)}\right)^2 = (1-p)^{2n}$$

② $\sum_{j=0}^{\infty} p^j = \sum_{j=0}^{n} p^j + \sum_{j=n+1}^{\infty} p^j = \frac{1}{1-p}, \quad p \in (0,1)$

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} p^j = \frac{1}{1-p} - \sum_{j=0}^{n} p^j = \frac{1}{1-p} - \frac{1-p^{n+1}}{1-p} = \frac{p^{n+1}}{1-p}$$

$$\mathbb{P}(Z(\omega) \geq n) = (1-p)^{2n}$$

$$\mathbb{P}(Z(\omega) = n) = \mathbb{P}(Z(\omega) \geq n) - \mathbb{P}(Z(\omega) \geq n+1) =$$

$$= (1-p)^{2n} - (1-p)^2(1-p)^{2n} = (1-p)^{2n}(1-(1-p)^2) =$$

$$= (1-p)^{2n}\, p(2-p) \;//$$

$$\left(\sum_{j=0}^{n} p^j\right)(1-p) = \sum_{j=0}^{n} p^j - \sum_{j=0}^{n} p^{j+1} = \sum_{j=0}^{n} p^j - \sum_{j=1}^{n+1} p^j = p^0 - p^{n+1} = 1 - p^{n+1}$$

A4) $X_1, X_2$ unabh. & $\rho_1, \rho_2$ stetig

a) $Y = X_1 + X_2$

Betrachte Vert.-fkt. $F_Y(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho(y,z)\, \chi_{y+z\leq x}(y,z)\, dy\, dz$

$X_{1,2}$ unabh. $\Rightarrow F_Y(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \rho_1(y)\, \rho_2(z)\, \chi_{y+z\leq x}(y,z)\, dy\, dz$

$= \int_{\{(y,z)\in\mathbb{R},\, y+z\leq x\}} \rho_1(y)\, \rho_2(z)\, dy\, dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{y\leq x-z} \rho_1(y)\, \rho_2(z)\, dy\, dz =$

$= \int_{\mathbb{R}} \rho_2(z) \left( \int_{y\leq x-z} \rho_1(y)\, dy \right) dz = \int_{\mathbb{R}} \rho_2(z) \left( \int_{-\infty}^{x-z} \rho_1(y)\, dy \right) dz \overset{y = t - z}{=}$

$= \int_{\mathbb{R}} \rho_2(z) \left( \int_{-\infty}^{x} dt\, \rho_1(t-z) \right) dz \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{x} \left( \int_{\mathbb{R}} \rho_2(z)\, \rho_1(t-z)\, dz \right) dt$

$\rho_1, \rho_2$ messbar bzw. intbar auf $\mathbb{R}$, da Wkt.dichten

$\Rightarrow F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{(\rho_1 * \rho_2)(t)}_{=\rho_Y(t)}\, dt$ ✓

$\rho_Y(t) = (\rho_1 * \rho_2)(t)$ ist die Wkt.dichte von $Y$, da

$F_Y(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho_Y(t)\, dt$

b) $\rho_1(x) = \chi_{[0,\infty)}(x)\, e^{-x}$, $\rho_2(x) = \chi_{[0,\infty)}(x)\, \alpha e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$

$\rho(x) = \rho_1 * \rho_2(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\infty)}(x-y)\, e^{-x-y}\, \chi_{[0,\infty)}(y)\, e^{-\alpha y}\, dy =$

$$= \chi_{[0,\infty)}^{(x)} \alpha e^{-x} \int_0^\infty \chi_{[0,\infty)}^{(x-y)} e^{y} e^{-\alpha y} \, dy =$$

$$= \chi_{[0,\infty)}^{(x)} \alpha e^{-x} \int_0^\infty e^{(1-\alpha) y} \, dy = \chi_{[0,\infty)}^{(x)} \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-x} e^{(1-\alpha) y} \Big|_0^x =$$

$$= \chi_{[0,\infty)}^{(x)} \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{-x} \left( e^{x} e^{-\alpha x} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow \rho(x) = \chi_{[0,\infty)}^{(x)} \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( e^{-\alpha x} - e^{-x} \right)$$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho(x) \, dx = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right) = 1 \quad \checkmark$$

# Blatt 13      Probeklausur

**A1** Integration über

$$\partial B_R(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = R^2\} \cong S^1(R)$$

a) $\displaystyle\underbrace{\int_{S^1(R)}}\underline{u}\, d\underline{s}$     Kurve $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(\varphi) = R\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

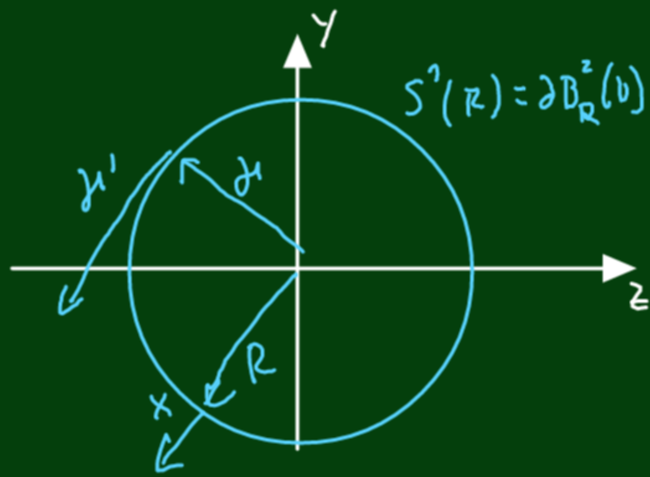
$$\gamma'(\varphi) = R\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \underline{u}(\gamma(\varphi))\,\gamma'(\varphi)\,d\varphi = R^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\varphi\cos\varphi}_{\frac{1}{3}\frac{d}{d\varphi}\sin^3\varphi} + \frac{1}{2}\cos^3\varphi\, d\varphi =$$

$$= R^3\left(\frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 1/2\, \cos^3\varphi\, d\varphi\right) \overset{\text{P.I.}}{=}$$

$$= \frac{R^3}{2}\left(\sin\varphi\cos^2\varphi\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi\right) =$$

$$= \frac{R^3}{3}\sin^3\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0$$



b) <u>Satz von Stokes</u>

Allg.: Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$

und ein Kompaktum mit glattem Rand, so gilt:

Normalenvektor von A

$$\int_{\partial A} \underline{u}\, d\underline{s} = \int_A \operatorname{rot} \underline{u}\, \hat{n}\, dS$$

Sei nun $u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad u(x,y,z) = \begin{pmatrix} -xy \\ x^2/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rot} \underline{u} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x x^2/2 + \partial_y xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix}$$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$A := B_R^2(0) \quad dS = e_z\, r\, dr\, d\varphi$

$$\int_{S^1(R)} \underline{u}\, d\underline{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \operatorname{rot} \underline{u}\; e_z\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R 2r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi = 2\,\frac{R^3}{3} \int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0$$

Fubini OK, da Integration über stetige Fkt.

und beschränkte Menge.

$\wedge$

$B_R(0)$

A2) a)

1. Variante: C-R-DGL: $h(z) = h_1(x,y) + i\,h_2(x,y)$

$$\partial_y h_2 = 2y \neq 0 = \partial_x h_1(x,y)$$

$\Rightarrow$ $h_1(x,y) = 0$, $h_2(x,y) = y^2$

$\Rightarrow$ nicht hol. auf $\mathbb{C}$

2. Variante:

$h(z)$ sollte $\forall z \in \mathbb{C}$ diffbar sein., d.h. $\forall z \in \mathbb{C}$ und jede bel. Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ gilt:

$$h'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(z+z_n) - h(z)}{z_n}$$

Sei $z = i$, $z_n = \frac{i}{n}$ $\quad y_n = \frac{1}{n}$

$$h'(i) = \lim_{n\to\infty} -in\left(h\left(i + \frac{i}{n}\right) - h(i)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + 2\right) = 2$$

mit $y_n$: $\quad h'(i) = \lim_{n\to\infty} n\left(\underbrace{h\left(i + \frac{1}{n}\right)}_{= i} - \underbrace{h(i)}_{= i}\right) = 0 \neq 2$

$\Rightarrow$ nicht holom.

3. Variante: Identitätssatz

Sei $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = 0$ hol.

$g(z) = h(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

Somit sei $z_n = \frac{a}{n}$, $a \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt:

$g(z_n) = h(z_n) \Rightarrow$ da $z_n$ hat Häufungspkt. bei 0

Identitätssatz $\Rightarrow h(z) = g(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow h(i) = 1$ ↯

b) Sei $f_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 - 3xy^2$

ges.: $f_2: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, s.d. $f(z) = f_1(x,y) + i f_2(x,y)$ hol.

C-R-DGL:

$\partial_x f_1 = 3x^2 - 3y^2 = \partial_y f_2 \Rightarrow f_2 = 3x^2y - y^3 + C(x)$

$-\partial_y f_1 = 6xy = \partial_x f_2 \Rightarrow f_2(x,y) = 3x^2y + C(y)$

$\Rightarrow C(y) = -y^3 \qquad C(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig

$\Rightarrow f(x,y) = x^3 + 3x(iy)^2 + 3x^2(iy) + (iy)^3 + c$

$= (x+iy)^3 + c = z^3 + c$

c) $g: D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z+2}{z^2 - i} e^{\frac{1}{z+2}}$

$D = \mathbb{C} \setminus \{-\sqrt{i}, \sqrt{i}, -2\}$, zudem sind

$\frac{1}{z^2 - i}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{i}\}$ hol. und $(z+2)\, e^{\frac{1}{z+2}}$ auf

$\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ holom.

- $z_1 = \sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4} = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$

$\lim\limits_{z \to \sqrt{i}} |g(z)| = \infty$ und $\lim\limits_{z \to \sqrt{i}} |(z - \sqrt{i})\, g(z)| = \left| \frac{2 - \sqrt{i}}{-2\sqrt{i}}\, e^{1/2 - \sqrt{i}} \right| < \infty$

$\Rightarrow$ Pol 1. Ordnung

- $z_2 = -\sqrt{i}$ analog

- $z_0 = -2$ Aus Blatt 7:

$g$ in $z_0$ wesentl. Sing. $\Leftrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$

mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, sodass. $\lim\limits_{n\to\infty} |g(x_n)| \neq \lim\limits_{n\to\infty} |g(y_n)|$

Wähle: $x_n = -2 + \frac{1}{n}$, $y_n = -2 - \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} |g(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{|-2 + \frac{1}{n} - i|}\, e^{n} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} |g(y_n)| = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{|-1/n|}{|2 + \frac{1}{n} + i|}\, e^{-n} \right) = 0$$

$\Rightarrow z_0 = -2$ ist eine wesentl. Sing.

**A3)** a) $2 < |3-i| \Rightarrow 3 \in B_2(i)$

$|2i - i| = 1 < 2 \Rightarrow 2 \in B_2(i)$

$\sin(z)$ und $\dfrac{1}{z-3}$ hol. auf $\overline{B_2(i)}$

$\Rightarrow$ Cauchy-Int.satz: $f: \overline{B_2(i)} \to \mathbb{C}, \; z \mapsto \dfrac{\sin z}{z-3}$

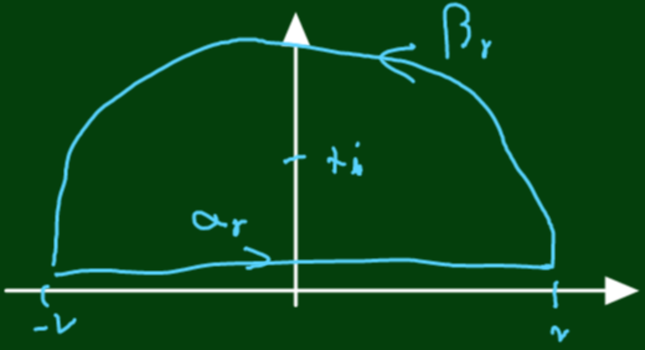
$$\int_{\partial B_2(i)} dz \, \frac{f(z)}{(z-2i)^2} = \frac{2\pi i}{1!} f'(z)$$

f hol., da Produkt von hol. Fkt. wieder hol.

b) Def: $I_r := \int_{-r}^{r} dz \, \dfrac{i}{1+z^2} \quad \forall r > 1$

Sei nun $\gamma: I \to \mathbb{C}$ $\quad \gamma(t) = \begin{cases} \alpha_r(t) = tr, & t \in [-1,1] \\ \beta_r(t) = re^{i\pi(t-1)}, & t \in [1,2] \end{cases}$

genaue Darstell. von $\alpha_r$ nicht notwendig




$f(z) = \dfrac{i}{1+z^2}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\alpha_r} f(z)\,dz}_{:= I_r} + \underbrace{\int_{\beta_r} f(z)\,dz}_{:= J_r}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\mathrm{Res}(f, +i) + \cancel{\mathrm{Res}(f, -i)}\right) =$$

da $-i$ nicht von $\gamma$ umschlossen wird

$$= 2\pi i \left( \frac{i}{z^2+1}(z-i) \right) \Big| = \frac{2\pi i}{2} = \pi i$$

siehe Blatt 8 Aufg. 1

$$\Rightarrow \pi i = \int_\gamma f(z)\, dz \qquad \boxed{\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left((z-a)^n f(z)\right)}$$

$\uparrow \lim_{z\to a}$

$$= \int_{\alpha_r} f(z)\, dz + \int_{\beta_r} f(z)\, dz = I_r + J_r$$

$$\lim_{r\to\infty} I_r = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{i}{1+x^2}$$

kurvenintegral $\beta(t) = re^{i\pi(t-1)}$, $t\in[1,2]$

$$|J_r| = \left|\int_{\beta_r} dz\, \frac{i}{1+z^2}\right| = \left|\int_1^2 dt\, \frac{iri\pi e^{i\pi(t-1)}}{1+r^2 e^{i2\pi(t-1)}}\right| \leq$$

$$\leq \int_1^2 dt\, \frac{r\pi \overbrace{|e^{i\pi(t-1)}|}^{=1}}{|1+r^2 e^{2\pi i(t-1)}|} \overset{u=t-1}{=} \int_0^1 du\, \frac{r\pi}{|1+r^2 e^{2\pi i u}|} \leq$$

$$\overset{\Delta\text{-Ungl. } ①}{\leq} \int_0^1 du\, \frac{r\pi}{r^2 |e^{2\pi i u}| - 1} = \frac{r\pi}{r^2-1} \xrightarrow{r\to\infty} 0$$

① $|z+w| \geq |z| - |w| > 0$, falls $|z| > |w|$

$$\Rightarrow \lim_{r\to\infty} |J_r| = 0 \Rightarrow \lim_{r\to\infty} J_r = 0$$

$$\Rightarrow \pi i = \int_\gamma f(z)\, dz = I_r + J_r$$

$$\xrightarrow{r\to\infty} I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{i}{x^2+1} = \pi i$$

A 4 a) Nein, da $\Omega \in \mathfrak{A}$, da $a \in \Omega$

$\Rightarrow \Omega^c = \emptyset \in \mathfrak{A} \Rightarrow a \notin \emptyset$ ↯

$\Rightarrow \mathfrak{A}$ keine $\sigma$-Alg.

b) (i) $\emptyset \subset \{a,b,c\} \Rightarrow \emptyset \in \mathfrak{A}'$

(ii) $M \in \mathfrak{A}'$ : 1. Fall: $M \subset \{a,b,c\} \Rightarrow M^c = \Omega \setminus M \supset \{d,e,f\}$
$\Rightarrow M^c \in \mathfrak{A}'$

2. Fall: $M \supset \{d,e,f\} \Rightarrow M^c = \Omega \setminus M \subset \{a,b,c\} \Rightarrow M^c \in \mathfrak{A}'$

(iii) Sei $(A_n) \in \mathfrak{A}'$

Sei $I$ (bzw $J$) die Indexmenge womit

$A_i \subset \{a,b,c\} \ \forall i \in I$ bzw. $A_j \supset \{d,e,f\} \ \forall j \in J$

1. Fall: Sei $I = \emptyset$

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in J} A_n \supset \{d,e,f\} \Rightarrow A \in \mathfrak{A}'$$

2. Fall: Sei $I \neq \emptyset$

$$A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \underbrace{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)}_{\subset \{a,b,c\}} \cup \underbrace{\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right)}_{\supset \{d,e,f\}} \supset \{d,e,f\}$$

$\Rightarrow A \in \mathfrak{A}'$

A5) $X: \Omega \to \mathbb{R}$ mit Whk.dichte

$\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \; , \; x \mapsto C\, e^{-\lambda x^2} \; , \; \lambda > 0$

$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$ bekannt

$$1 \overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, dx = C \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda x^2} dx = C \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$\Rightarrow \quad C = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}$$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, \rho(x)\, dx \quad , \; \rho(-x) = \rho(x)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(-X) \iff 2\,\mathbb{E}(X) = 0 \iff \mathbb{E}(X) = 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} x \rho(x)\, dx \overset{x=-y}{=} \int_{\infty}^{-\infty} dy \;\; \rho(y)\, (-y) = \int_{\mathbb{R}} y\, \rho(y)\, dy$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int C\, x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{-C}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}} x \left(-2\lambda x e^{-\lambda x^2}\right) dx =$$

$$= -\frac{C}{2\lambda} \underbrace{x e^{-\lambda x^2}}_{=0 \,,\, |x| \to \infty} \Big|_{\mathbb{R}} + \frac{1}{2\lambda} \underbrace{\int C\, e^{-\lambda x^2} dx}_{=1}$$

$$= \frac{1}{2\lambda} = \operatorname{Var}(X)$$