

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 8

Aufgabe 1:

Sei U ein Elementargebiet, $a \in U$ und $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. f habe in a einen Pol der Ordnung n , d.h. $g(z) = f(z)(z-a)^n$ für eine auf U holomorphe Funktion g mit $g(a) \neq 0$.

Zeigen Sie: Das Residuum von f an der Stelle a ist gegeben durch $g^{(n-1)}(a)/(n-1)!$.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge der Menge Ω bezeichnet. Es gelte

$$M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M \text{ oder } M^c \text{ ist höchstens abzählbar.}$$

Zeigen Sie: $\mathcal{A}$ ist eine σ -Algebra.

Aufgabe 3: Die sogenannte Cantor-Menge C lässt sich mittels folgender Iteration konstruieren:

Man beginnt mit dem abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ der reellen Zahlen von 0 bis 1.

Aus diesem Intervall wird das offene mittlere Drittel entfernt (weggewischt), also alle Zahlen, die strikt zwischen $1/3$ und $2/3$ liegen. Übrig bleiben die beiden Intervalle $[0, 1/3]$ und $[2/3, 1]$. Aus diesen beiden Intervallen wird wiederum jeweils das offene mittlere Drittel entfernt und man erhält nun vier Intervalle: $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$ und $[8/9, 1]$. Von diesen Intervallen werden wiederum die offenen mittleren Drittel entfernt. Dieser Schritt wird unendlich oft wiederholt.

Zeigen Sie: C ist überabzählbar und Lebesguemessbar. Geben Sie das Lebesguemaß von C an.

Hinweis: Wählen Sie eine für den Beweis vorteilhafte Darstellung der reellen Zahlen.

Abgabe: Montag, 18.12.2017, 10 Uhr.