MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2017/18

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 12

Aufgabe 1:

(a) Betrachten Sie die Mengenfolgen

$$A_n := [0, n] \quad \text{und} \quad B_m := [0, b_m] \quad \text{mit } b_m := \begin{cases} 1 & \text{für } m \text{ gerade} \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k$, $\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} A_k$, $\limsup_{m\to\infty} B_m$ und $\liminf_{m\to\infty} B_m$.

(b) Zeigen Sie, dass für beliebige Mengenfolgen C_n die Inklusion $\liminf_{n\to\infty} C_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} C_n$ gilt.

Aufgabe 2:

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsgröße heißt exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls X eine Dichte der Form

$$\rho_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}^+$ besitzt.

(a) Zeigen Sie, dass ρ_λ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $V_X(t)$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Bemerkung: Die Exponentialverteilung spielt eine zentrale Rolle bei der Beschreibung von Lebenszeiten eines Bauteiles oder eines Atoms.

Aufgabe 3:

Eine diskrete Zufallsvariable X ist geometrisch verteilt genau dann, wenn

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

X und Y seinen stochastisch unabhängige, mit Parameter p geometrisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω. Finden Sie die Verteilung der Zufallsvariable $Z = min(X, Y)$ (d.h. $Z(\omega) = min(X(\omega), Y(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$).

Hinweis: Statt $\mathbb{P}(Z = n)$ direkt zu berechnen, empfiehlt es sich zunächst die Verteilung $\mathbb{P}(Z \geq n)$ zu betrachten.

Aufgabe 4:

Es seien X_1 und X_2 unabhängige Zufallsvariablen mit stetigen Dichten ρ_1 und ρ_2.

(a) Zeigen Sie, dass die Dichte von $Y = X_1 + X_2$ gegeben ist durch die Faltung der beiden ursprünglichen Dichten: $\rho(x) = \rho_1(x) * \rho_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1(x-y) rho_2(y) dy$

Hinweis: Begründen Sie, dass sich die Verteilungsfunktion schreiben lässt als

$$F(x) = P(Y = X_1 + X_2 \leq x) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{y+z \leq x}(y,z) \rho_1(y) \rho_2(z) dy dz,$$

wobei $\chi_{y+z\leq x}(y,z) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y+z \leq x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die Indikatorfunktion ist.

(b) Berechnen Sie die Dichten für $\rho_1(x) = e^{-x}$ sowie für $\rho_2(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, wobei $\alpha > 0$ und $x \geq 0$ ist.

Abgabe: Montag, 29.01.2018 , 10 Uhr.