MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2017/18

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 11

Aufgabe 1:

Es werden zwei faire Würfel (ein roter und ein grüner) geworfen und ihre Augenzahlen mit den Zufallsvariablen X und Y beschrieben.

(a) Berechnen Sie die Kovarianz ($Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$) von $X+Y$ und $X-Y$.

(b) Sind $X+Y$ und $X-Y$ unabhängig? Beweisen oder widerlegen Sie.

Aufgabe 2:

Es sei Ω eine endliche Menge und $P : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

(a) Gibt es Zufallsgrößen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, sodass $E(X) > 100E(Y)$ aber $P(Y - X \geq 0) \geq 0,99$?

(b) Zeigen Sie, dass es keine Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $P(|X| \geq 1) > \frac{1}{2}$ und $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}$ gibt.

Aufgabe 3:

(a) Es sei Ω eine endliche Menge, $P : \mathfrak{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{a \in X(\Omega)} f(a)P(X = a).$$

(b) Wir betrachten den Laplace-Raum $\Omega = \{a, b, c\}$. Finden Sie zwei Zufallsvariablen, die unkorreliert, aber abhängig sind.

Bemerkung: Zwei Zufallsvariablen X, Y heißen unkorreliert, falls $Cov(X,Y) = 0$.

Aufgabe 4:
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ heißt Poisson-verteilt, falls es ein $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodass

$$P(X = k) = F_\lambda(k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Zeigen Sie, dass die Poisson-Verteilung auf 1 normiert ist. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der Poison-Verteilung.

Abgabe: Montag, 22.01.2018 , 10 Uhr.