MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN WS 2017/18

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. P. Pickl

Blatt 10

Aufgabe 1: Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$. Zeigen Sie: f ist messbar. (messbar bedeutet hier jeweils $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}$-messbar, wobei $\mathcal{B}$ die Borel'sche σ-Algebra über $\mathbb{R}$ ist.)

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Urbilder der Intervalle (∞, α) für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ in der Borel'schen σ-Algebra liegen. Warum reicht das aus?

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-integrierbare Funktion, A sei eine Lebesgue Nullmenge, d.h. eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit äußerem Maß 0.

Sie g eine Funktion mit $g(x) = f(x)$ für all $x \notin A$. Zeigen Sie: g ist Lebesgue-integrierbar mit $\int_B g(x)dx = \int_B f(x)dx$ für alle $B \in \mathcal{B}$.

Aufgabe 3:

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Gegeben sei das folgende Maß: $\delta_a(A) = 1$ falls $a \in A$, $\delta_a(A) = 0$ falls $a \notin A$. Zeigen Sie, dass δ_a in der Tat ein auf der gesamten Potenzmenge von $\mathbb{R}$ definiertes Maß ist. Man nennt δ_a auch das Diracmaß.

(b) Bestimmen sie für eine beliebige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ das Integral $\int f(x)d\delta_a$.

Abgabe: Montag, 15.01.2018 , 10 Uhr.