

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 13

Aufgabe 1: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-Algebra und $\mathcal{D} := \{A \subset \mathbb{R} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Zeigen Sie: $\mathcal{D}$ ist eine σ -Algebra.

Aufgabe 2: Beweisen Sie: Für alle $f \in \mathcal{L}([a, b])$ gilt:

$$\int_a^b |f(x)| \lambda(dx) = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ fast überall auf } [a, b] .$$

Aufgabe 3: Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge Lebesgue-integrierbarer Funktionen, die im Limes $n \rightarrow \infty$ auf dem offenen Intervall $(0, 1)$ punktweise gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion f konvergieren. Widerlegen Sie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \lambda(dx) = \int_0^1 f(x) \lambda(dx) .$$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $C[a, b]$, der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, vollständig bezüglich der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ ist.

Hinweis: Was müssen Sie zum Beweis der Vollständigkeit eines Raumes bezüglich einer gegebenen Norm zeigen? Denken Sie für den letzten Schritt an das $\frac{\varepsilon}{3}$ -Argument!

Aufgabe 5: Es sei $\mathbb{K}$ der Körper der komplexen oder reellen Zahlen. Beweisen Sie, dass $l^2 := \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty, x_k \in \mathbb{K}, k \in \mathbb{N}\}$ mit der Norm $\|x\|_2 := (\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2)^{\frac{1}{2}}$ vollständig ist!