

# Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

## Blatt 12

### Aufgabe 1: (\*)

Sei  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge absteigender Mengen, d.h.  $M_n \subset M_{n-1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $M = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$  und  $F_n := M_{n-1} \setminus M_n = M_{n-1} \cap M_n^c$ . Zeigen Sie, nachdem Sie sich die Situation graphisch veranschaulicht haben:

(a)  $F_j \cap F_k = \emptyset$  für  $k \neq j$ ;

(b)  $M_1 \setminus M = \bigcup_{j=2}^{\infty} F_j$ ;

(c) Seien  $A$  und  $B$  Lebesgue-messbare Mengen mit  $A \subset B$  und  $\lambda(A) < \infty$ , dann ist  $\lambda(B \setminus A) = \lambda(B) - \lambda(A)$ ;

(d)  $\lambda(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(M_n)$ . *Hinweis:* Benutzen Sie die Ergebnisse der vorigen Teilaufgaben sowie die  $\sigma$ -Additivität!

**Aufgabe 2:** Es sei  $x \in [0, 1]$ ,  $r_i : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  die  $i$ -te Rademacher-Funktion (diejenige Funktion, welche die  $i$ -te Stelle der Dualentwicklung von  $x$  angibt) und  $\rho_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i(x)$ . Zeigen Sie, dass für alle  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$\lambda(\{x \in [0, 1] : |\rho_n(x) - 1/2| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} .$$

*Hinweis:* Folgen Sie dem Beweis der Vorlesung und führen Sie alle Schritte sorgfältig aus! Überlegen Sie sich zudem, inwieweit diese Aussage mit dem Zufall in einem physikalischen Münzwurf-Experiment zusammenhängt!

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie: Das Lebesgue-Borel-Maß ist das bis auf Normierung eindeutige translationsinvariante Maß  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$ .

*Hinweis:* Betrachten Sie ein anderes Maß  $\mu$  für abgeschlossene Intervalle und zeigen Sie, dass alle Eigenschaften zusammen bereits (bis auf Normierung) die Länge der Intervalle eindeutig festlegen. Beginnen Sie bei Intervallen mit rationalen Intervallgrenzen!

**Sternchenaufgabe** (\*): Falls Sie eine Korrektur dieser Aufgabe wünschen, werfen Sie diese bis Freitag 12:00 h auf einem gesonderten Blatt in den Zettelkasten "Mathematik III für Physiker" im ersten Stockwerk des B-Turms ein! Die korrigierten Aufgaben werden in der folgenden Woche über den Rückgabekasten zurückgegeben.