

# Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

## Blatt 11

**Aufgabe 1:** Sei  $P(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein Polynom vom Grad  $\geq 1$  mit  $P(x) \neq 0$  für  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . Sei außerdem  $0 < \alpha < 1$ . Wählen Sie eine geeignete Kontur, um das Integral

$$I := \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx$$

mithilfe des Residuensatzes über die Residuen an den Polstellen der komplexen Funktion  $z^{\alpha-1}/P(z)$  auszudrücken!

**Aufgabe 2:** Seien  $A, B$  nichtleere Teilmengen einer Menge  $\Omega$ . Man konstruiere die von  $A, B$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

**Aufgabe 3:** Beachten Sie für diese Aufgabe, dass für  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  gilt:  $\lambda([a, b]) = b - a$  und für messbare  $A_n$ :  $\lambda(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(A_n)$ .

(a) Zeigen Sie:  $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$ .

(b) Sei  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$  die Cantormenge, die durch sukzessive Wegnahme der “mittleren Drittel” entsteht. Zeigen Sie:  $\mathcal{C}$  ist überabzählbar. *Hinweis:* Stellen Sie  $x \in [0, 1]$  im triadischen System dar. Was charakterisiert dann  $x \in \mathcal{C}$ ?

*Zur Erinnerung:* Die Cantormenge  $\mathcal{C} \subset [0, 1]$  ist  $\mathcal{C} := \bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{C}_k$ , wobei  $\mathcal{C}_k$  induktiv wie folgt definiert wird:  $\mathcal{C}_0 = [0, 1]$  und  $\mathcal{C}_{k+1}$  entsteht aus  $\mathcal{C}_k$  indem man  $\mathcal{C}_k$  als disjunkte Vereinigung von  $2^k$  Intervallen darstellt und aus jedem dieser Intervalle das offene mittlere Drittel entfernt.

(c) Zeigen Sie:  $\lambda(\mathcal{C}) = 0$ . *Hinweis:* Sie können ohne Beweis benutzen, dass  $\lambda(\bigcap_{k=0}^\infty \mathcal{C}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\mathcal{C}_k)$ , wenn  $\mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}_{k-1} \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 4:** Sei  $\bar{\mathcal{C}}$  die Menge aller abgeschlossenen und  $\mathcal{C}$  die Menge aller offenen Intervalle in  $\mathbb{R}$ . Die von  $\mathcal{C}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra heißt Borel-Algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Zeigen Sie:

(a)  $\bar{\mathcal{C}}$  erzeugt ebenfalls  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

(b) Auch die Menge aller offenen Mengen erzeugt  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .