

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 10

Aufgabe 1:

- (a) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Laurentreihen und bestimmen Sie die Residuen!

$$(i) f(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad (ii) f(z) = \frac{\sin z}{z^2}, \quad (iii) f(z) = \frac{\exp(z)-1}{z}.$$

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

Hinweis: Welcher Typ von Singularität ist $z = 0$? Verformen Sie den Integrationsweg zu einem, der die Null durch einen kleinen Halbkreis in der oberen Halbebene ausspart ($\rightarrow \frown \rightarrow$) und ersetzen Sie $\sin x$ mit Hilfe der Eulerformel! Berechnen Sie die beiden entstehenden Integrale jeweils durch geschicktes Schließen des Integrationswegs mit einem “unendlich großen” Halbkreis! Zeigen Sie im Detail, dass die jeweiligen Halbkreise keine Beiträge liefern!

- (c) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx .$$

- (d) Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Gaußfunktion,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-ikx} dx .$$

Achten Sie allgemein bei dieser Aufgabe auf eine besonders saubere Argumentation!

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die im Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nur einfache Pole $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ hat. Dann nennt man

$$P \int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_1 - \epsilon} f(y) dy + \int_{x_1 + \epsilon}^{x_2 - \epsilon} f(y) dy + \dots + \int_{x_n + \epsilon}^b f(y) dy \right)$$

den *Hauptwert* des Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe endlich viele Pole (erster Ordnung) $(x_l)_{l \in I}$ auf der reellen Achse. Betrachten Sie einen Weg von $-R$ bis R entlang der reellen Achse, wobei jeder Pol x_l mit einem Halbkreis $\widehat{x_l}$ in der oberen komplexen Halbebene umgangen wird. Schließen Sie den Weg durch einen Halbkreis vom Radius R in der oberen Halbebene. Die (endlich vielen) Pole von f in der oberen Halbebene seien $(z_j)_{j \in J}$. Zeigen Sie: Wenn das Integral über f über den Halbkreis im Limes $R \rightarrow \infty$ verschwindet, dann gilt

$$P \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{l \in J} \text{res}(f, z_l) + i\pi \sum_{n \in I} \text{res}(f, x_n).$$

Aufgabe 3:

- (a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)^i, \quad i^{\frac{1}{i}}, \quad (\log i)^i, \quad i^{i^i}.$$

Bei Ausdrücken der Form z^α ist dabei jeweils der Hauptzweig der Potenzfunktion gemeint und $\log z$ bezeichnet den Hauptzweig des Logarithmus. Definitionsgemäß gilt für die Hauptzweige von Potenzfunktion und Logarithmus:

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z}, \quad \log z = \log |z| + i \arg z,$$

wobei $\arg z$ die Phase bei der Polardarstellung $z = |z| e^{i \arg z}$ mit $\arg z \in (-\pi, \pi]$ bezeichnet.

- (b) Beweisen Sie, dass der Hauptzweig der allgemeinen Exponentialfunktion $z \mapsto a^z$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Ableitung $z \mapsto a^z \log a$ hat!
- (c) In welchem Sinne gilt $(a^b)^c = a^{bc}$ im Komplexen?

Aufgabe 4: (*)

Konstruieren Sie geeignete Riemannsche Blätter für die Funktion $f(z) = \frac{\sqrt{z}}{1+z^2}$, um auf einem Blatt das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

zu berechnen!

Sternchenaufgabe (*): Falls Sie eine Korrektur dieser Aufgabe wünschen, werfen Sie diese bis Freitag 12:00 h auf einem gesonderten Blatt in den Zettelkasten “Mathematik III für Physiker” im ersten Stockwerk des B-Turms ein! Die korrigierten Aufgaben werden in der folgenden Woche über den Rückgabekasten zurückgegeben.