

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 9

Aufgabe 1:

- (a) Zeigen Sie den Gaußschen Mittelwertsatz: Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann gilt für alle $r \geq 0$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

- (b) Beweisen Sie aufbauend auf (a): Falls $|f|$ ein lokales Maximum bei $z_0 \in \mathbb{C}$ besitzt, so ist f konstant in einer Umgebung von z_0 . (Allgemeiner ist f dann sogar überall konstant.)

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz mit $|f(z)| \leq C|z|^\alpha$ für alle $|z| \geq R$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $C, R > 0$. Zeigen Sie: f ist ein Polynom höchstens $\lfloor \alpha \rfloor$ -ten Grades. (Die Gaußklammer $\lfloor \alpha \rfloor$ von α bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich α ist.)

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ganz und nicht konstant. Beweisen Sie, dass dann $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$ liegt, d.h. dass es zu jedem $w \in \mathbb{C}$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodass $|f(z) - w| < \varepsilon$!

Hinweis: Führen Sie einen Widerspruchsbeweis, indem Sie Liouvilles Satz auf eine geeignete Funktion anwenden.

Aufgabe 4: Sei $\alpha \geq 1$. Geben Sie die größte offene Kreisscheibe an, auf der die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+z)^n}{\alpha^{n+1}}$ konvergiert!

Aufgabe 5: Entwickeln Sie $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ in folgende Laurentreihen:

- (a) um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(0,1)}(0)$;
- (b) um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(1,2)}(0)$;
- (c) um $z_0 = 1$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(3,\infty)}(1)$.

Hierbei: $K_{(r,R)}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.