

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 7

Aufgabe 1: Sei $f : M \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Ihr *Graph* ist definiert als die Menge

$$\text{graph } f := \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in M\}.$$

In unserem Fall ist $\text{graph } f$ also eine zweidimensionale Fläche im $\mathbb{R}^3$.

- (a) Berechnen Sie für ein solches allgemeines f den Flächeninhalt von $\text{graph } f$! Suchen Sie dazu zunächst eine Parametrisierung von $\text{graph } f$! (Dies ergibt eine sehr nützliche Formel, denn oft kann man Flächen als Graph von Funktionen schreiben.)
- (b) Sei nun $f : B_2(1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Hierbei sei $B_2(1) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Skizzieren Sie $\text{graph } f$ und benutzen Sie Ihre Formel aus (a), um den numerischen Wert des Flächeninhalts von f anzugeben!

Aufgabe 2: Gegeben sei das Vektorfeld

$$\underline{v} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \underline{v}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{S^1(R)} \underline{v} \cdot d\underline{x},$$

wobei $S^1(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R\}$ ein Kreis mit Radius R ist, einerseits explizit und andererseits durch Anwendung des Satzes von Stokes für den $\mathbb{R}^3$!

Tipp: Ergänzen Sie für den zweiten Teil v um eine z -Komponente, sodass Sie den Satz von Stokes für den dreidimensionalen Raum anwenden können!

Aufgabe 3: Es sei

$$\underline{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \underline{F}(\underline{\Phi}(r, \theta, \varphi)) = \frac{1}{r} \underline{e}_r + r \cos \theta \underline{e}_\theta,$$

wobei $\underline{e}_r$ der Einheitsvektor in r -Richtung sowie $\underline{e}_\theta$ der Einheitsvektor in θ -Richtung sei sowie $\underline{\Phi}$ die Kugelkoordinatenabbildung (siehe Blatt 3, Aufgabe 1).

- (a) Berechnen Sie explizit das Fluss-durch-Fläche-Integral

$$I := \int_{S^2(R)} \underline{F} \cdot d\underline{A},$$

wobei $S^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = R\}$. *Tipp:* Bei einer Kugel ist das Normalenvektorfeld radial, d.h. $\underline{n} = \underline{e}_r$ in $d\underline{A} = \underline{n} dA$.

- (b) Berechnen Sie nun I durch Anwendung des Satzes von Gauß! Benutzen Sie dazu, dass die Divergenz in Kugelkoordinaten durch $\operatorname{div} \underline{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta F_\theta) + F_\varphi$ gegeben ist, wobei F_r, F_θ, F_φ die Komponenten von $\underline{F}$ in r, θ, φ -Richtung sind (z.B. ist $F_r = \underline{e}_r \cdot \underline{F} = \frac{1}{r}$).

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe wird gezeigt, dass eine Kontinuitätsgleichung zu einer Erhaltungsgröße führt. Dies spielt in vielen Bereichen der Physik, z.B. der Elektrodynamik, der Fluidmechanik und der Quantenmechanik, eine wichtige Rolle. Eine *Kontinuitätsgleichung* ist eine Gleichung der Form

$$\operatorname{div} \underline{j}(t, \underline{x}) = - \frac{\partial \rho(t, \underline{x})}{\partial t}.$$

Hierbei bezeichnet $\underline{j} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ einen *Strom* und $\rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine *Dichte*. (Immer wenn Sie die Wörter “Strom” und “Dichte” hören, bezieht sich das auf eine Kontinuitätsgleichung.) Die Divergenz $\operatorname{div} \underline{j}(t, \underline{x}) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial j_k}{\partial x_k}$ bezieht sich nur auf die Raumvariablen. Definieren Sie die Größe

$$Q(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \rho(t, \underline{x}) d^3x.$$

- (a) Zeigen Sie unter der Annahme, dass $\underline{j}(t, \underline{x}) \cdot |\underline{x}|^2$ für $|\underline{x}| \rightarrow \infty$ gegen Null geht, dass $\frac{dQ(t)}{dt} = 0$ gilt, dass also der Wert von Q in der Zeit erhalten ist! Benutzen Sie dafür die Kontinuitätsgleichung oben sowie den Satz von Gauß!
- (b) Bezeichne Vektoren im $\mathbb{R}^4$ nun als $x = (x^\mu)_{\mu=0,1,2,3} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Hierbei: $x^0 = t$. Definieren Sie den 4-er Strom als $j(x)$ mit $j^0 = \rho$, $(j^1, j^2, j^3) := \underline{j}$. Zeigen Sie, dass man Q ausdrücken kann als:

$$Q(t) = \int_{\Sigma_t} j^\mu(x) d\sigma_\mu, \quad (\text{Summation über } \mu = 0, 1, 2, 3),$$

wobei $\Sigma_t := \{x \in \mathbb{R}^4 : x^0 = t\}$ eine flache raumartige Hyperfläche im $\mathbb{R}^4$ ist und $d\sigma_\mu = n_\mu d\sigma$ das orientierte Hyperflächenelement ($d\sigma$ ist selbst ein 3-dimensionales Volumenelement und $n = (n_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$ der 4-dimensionale Normalen(ko)vektor).

- (c) Finden Sie eine 3-Form ω_j auf $\mathbb{R}^4$, sodass

$$Q(t) = \int_{\Sigma_t} \omega_j.$$

Zeigen Sie, dass $d\omega_j = 0$ und setzen Sie diesen Befund mit dem Ergebnis aus (a) in Bezug! (Hierdurch erreicht man eine vollkommen geometrische 4-dimensionale Formulierung, so wie sie in der Relativitätstheorie benötigt wird.)