MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2015/16

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 6

Aufgabe 1: (*)

(a) Berechnen Sie das 1-dimensionale Gaußintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx$$

für $\alpha > 0$.

(b) Sei A eine symmetrischische und positiv definite $n \times n$-Matrix (d.h. alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von A sind positiv). Es bezeichne $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ die Diagonalmatrix mit den Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Weiter sei $\underline{x}^T = (x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\underline{x}^T A \underline{x}} \, d^n \underline{x} \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\underline{y}^T D \underline{y}} \, d^n \underline{y} \;=\; \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}}\,.$$

(c) Berechnen Sie nun die zur obigen Gaußverteilung gehörende Kovarianzmatrix C! Die diese Matrix ist definiert über ihre Einträge

$$C_{ij} \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, e^{-\underline{x}^T A \underline{x}} \, d^n \underline{x}.$$

Hinweis: Überlegen Sie, wie Sie $x_i x_j$ durch geschickte Differentiation in ein normales Gaußintegral bekommen können! Danach könnte der Laplace'sche Entwicklungssatz hilfreich sein, um die Differentiation auszuführen. Erinnern Sie sich zur Vereinfachung des Endergebnisses an die Formel zur Bestimmung des Inversen einer Matrix mithilfe von Determinanten!

Aufgabe 2: Die Länge einer Kurve K ist definiert als

$$L(K) = \int_I \sqrt{|\underline{\Phi}'(t)|^2}\, dt\,,$$

wobei $\underline{\Phi} : I \subset \mathbb{R} \to K$ ein Weg ist, der die Kurve einfach durchläuft.
Sei $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1 - \frac{2}{3}x)^{\frac{3}{2}}$.

(a) Man berechne die Länge des Graphen von f.

(b) Finden Sie nun $s : [0,1] \to [0, L(K)]$ so, dass $\underline{\lambda}(q) = \underline{\Phi} \circ s^{-1}(q)$ diejenige Parametrisierung ist, welche die Kurve mit Geschwindigkeit 1 durchläuft.
(Dies ist analog zur Parametrisierung von Weltenlinien durch die Eigenzeit in der Relativitätstheorie.)

Aufgabe 3: Gegeben sei das Vektorfeld $\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\underline{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2xz^3 \\ -2yz^3 \\ 3z^2 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\underline{v}$ nicht als Gradient einer reellwertigen Funktion ausdrückbar ist!

(b) Finden Sie nun einen integrierenden Faktor für $\underline{v}$, also eine nullstellenfreie Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) \neq 0\ \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$, sodass $g\underline{v}$ Gradient einer reellwertigen Funktion ist!

Hinweis: Es genügt ein spezielles g zu finden, insbesondere muss dieses nicht von allen Variablen abhängen.

(c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \underline{v} \cdot d\underline{s},$$

wobei die Kurve γ durch $\underline{\phi} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$,

$$\underline{\phi}(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\},\ a \neq b$$

parametrisiert wird.
Wieso hätten Sie dieses Ergebnis erwarten können?

Sternchenaufgabe (*): Falls Sie eine Korrektur dieser Aufgabe wünschen, werfen Sie diese bis Freitag 12:00 h auf einem gesonderten Blatt in den Zettelkasten “Mathematik III für Physiker” im ersten Stockwerk des B-Turms ein! Die korrigierten Aufgaben werden in der folgenden Woche über den Rückgabekasten zurückgegeben.