MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WiSe 2015/16

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 5

Aufgabe 1:

(I) Sei $\{\underline{e}^i,\ i = 1,2,3\}$ die zur kanonischen Basis $\{\underline{e}_j,\ j = 1,2,3\}$ im $\mathbb{R}^3$ duale Basis, definiert durch $\underline{e}^i(\underline{e}_j) = \delta^i_j$. Sei außerdem $\underline{x} = \sum_{j=1}^3 x^j \underline{e}_j =: x^j \underline{e}_j$ (gemäß Einsteins Summationskonvention).

(a) Berechnen Sie $\underline{e}^i(\underline{x})$!

(b) Sei $\underline{x}^* := x_i \underline{e}^i$ (wobei $x_i := x^i$) und $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $\underline{x}^*(\underline{a})$!

(c) Sei $\underline{y}^* := y_i \underline{e}^i$. Geben Sie $\underline{x}^* \wedge \underline{y}^*$ an, sowie den mit dieser 2-Form assoziierten Vektor $\underline{t}$!

(d) Drücken Sie die 2-Form aus (c) mit Hilfe der Determinantenform aus!

(e) Zeigen Sie: Für $\underline{t}$ aus (c) gilt: $\underline{t} \in \operatorname{Ker} \underline{x}^*$ und für alle $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $(\underline{t}, \underline{a}) \in \operatorname{Ker} \underline{x}^* \wedge \underline{y}^*$.

(II) Zur lokalen Anwendung der Formen. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Bezeichne f als 0-Form ω. Dann ist

$$(*) \qquad d\omega \ := \ \partial_i f \, dx^i$$

eine 1-Form, wobei $dx^i(\underline{\Phi}(t))dt := \Phi^i(t)dt$ für einen differenzierbaren Weg $\underline{\Phi} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Sei nun $\omega = f_i dx^i$ eine 1-Form mit differenzierbaren Funktionen $f_i,\ i = 1,2,3$. Dann ist

$$(**) \qquad d\omega \ := \ \partial_j f_i \, dx^j \wedge dx^i$$

eine 2-Form, die auf Tangentialvektoren $\partial_t \underline{\Phi}(t,s)$, $\partial_s \underline{\Phi}(t,s)$ einer Flächenparametrisierung $\underline{\Phi} : I \times J \to \mathbb{R}^3$ wirkt.

(a) Zeigen Sie für die 1-Form $(*)$, dass $d(d\omega) = d^2\omega = 0$ gilt! Zeigen Sie außerdem, dass auch für die 2-Form $(**)$ gilt: $d^2\omega = 0$. Was bedeuten diese beiden Aussagen im ∇-Kalkül?

(b) Sei $\omega := f_{ij}\, dx^i \wedge dx^j$ eine 2-Form (wobei $f_{ij},\ i,j = 1,2,3$ differenzierbare Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind). Man berechne

$$\omega(\partial_t \underline{\Phi}(t,s)dt, \partial_s \underline{\Phi}(t,s)ds) \ = \ f_{ij}(\underline{\Phi}(t,s))\, dx^i \wedge dx^j(\partial_t \underline{\Phi}(t,s)dt, \partial_s \underline{\Phi}(t,s)ds)$$

und drücke das Ergebnis durch die Determinantenform aus!

Aufgabe 2:

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es gelte $f'(x) \neq 0 \;\forall x$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ injektiv ist!

(b) Sei nun $n \geq 2$ und $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Widerlegen Sie folgende Aussage durch ein geeignetes Gegenbeispiel:

$$\det(\underline{f}'(\underline{x})) \neq 0 \;\; \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; \underline{f} \text{ ist injektiv.}$$

Aufgabe 3: Sei $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, D offen, eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie den mehrdimensionalen Mittelwertsatz. Das bedeutet, zeigen Sie, dass für je zwei Punkte $\underline{x}, \underline{y} \in D$, deren Verbindungsstrecke $\overline{\underline{x}\underline{y}}$ in D liegt, ein $\underline{z} \in \overline{\underline{x}\underline{y}}$ existiert, sodass $f(\underline{x}) - f(\underline{y}) = \operatorname{grad} f(\underline{z})(\underline{x} - \underline{y})$.