

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 4

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Stellen lokaler Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \rightarrow f(x, y) := e^5 + \frac{1}{10}(x^2 + y^2 - 35)e^{-x}$$

und ermitteln Sie, ob es sich um lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte handelt!

Aufgabe 2: Seien $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ und $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^5 - 16y^5$. Bestimmen Sie die stationären Punkte von f sowie die zugehörigen Funktionswerte! Was können sie daraus für die Extrema schließen? (Skizze!)

Aufgabe 3:

$$W_N := \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_m!}$$

ist die Anzahl der Aufteilungen von N Teilchen auf m Kästen, wenn $\sum_{j=1}^m N_j = N$ gilt. Wenn den Kästen jeweils die Energie E_j zukommt, dann ist $\bar{E} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m E_j N_j$ die mittlere Energie pro Teilchen.

Zeigen Sie, dass am Maximum von W_N unter den Nebenbedingungen $\sum_{j=1}^m N_j = N$ und $\sum_{j=1}^m E_j N_j = E$,

$$N_j = C e^{-\lambda E_j} \tag{1}$$

gilt! Hierbei sind C und λ Konstanten, die durch die Nebenbedingungen bestimmt werden.

Hinweise: Da $N \gg m$ darf man annehmen, dass $N_j \gg 1$ für alle $j = 1, \dots, m$ und kann näherungsweise die Stirlingformel $N_j! \approx \left(\frac{N_j}{e}\right)^{N_j}$ verwenden. Dadurch können die N_j als kontinuierliche Variablen behandelt werden.

Minimieren Sie $\ln W_N$ statt W_N !

Bemerkung: Der Parameter λ in Formel (1) erhält durch den Zusammenhang mit der Thermodynamik eine physikalische Bedeutung. Dort ist $\lambda = \frac{1}{kT}$, mit der Boltzmannkonstante k und der Temperatur T .

Aufgabe 4: (*)

Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatoren: Unter allen Vierecken mit den gegebenen Seiten a, b, c, d hat das Sehnenviereck die größte Fläche.

Hinweis: Betrachten Sie die beiden Dreiecke mit den Seiten a, b und Zwischenwinkel α bzw. c, d und Zwischenwinkel β ! Welche Nebenbedingung müssen α und β erfüllen, damit die beiden Dreiecke ein Viereck mit den Seiten a, b, c, d bilden? Maximieren Sie die gemeinsame Fläche der beiden Dreiecke unter der gefundenen Nebenbedingung!

Warum ist das gefundene Maximum ein Sehnenviereck (siehe Faßkreisbogen!)?

Sternchenaufgabe (*): Falls Sie eine Korrektur dieser Aufgabe wünschen, werfen Sie diese bis Freitag 12:00 h auf einem gesonderten Blatt in den Zettelkasten “Mathematik III für Physiker” im ersten Stockwerk des B-Turms ein! Die korrigierten Aufgaben werden in der folgenden Woche über den Rückgabekasten zurückgegeben.