

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 3

Aufgabe 1: Die Transformation in Kugelkoordinaten ist bestimmt durch

$$\underline{f} : \mathbb{R}_+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \underline{f}(\underline{\xi}) = \underline{f}(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix},$$

mit $\underline{\xi} = (r, \theta, \varphi)^T$. Hierbei steht $(\cdot)^T$ für die Transposition eines Vektors oder einer Matrix.

- Berechnen Sie die totale Ableitung \underline{f}' der Koordinatentransformation, deuten Sie die Spaltenvektoren dieser Matrix geometrisch und skizzieren Sie diese! Welche Basistransformation vermittelt die Matrix?
- Bestimmen Sie das normierte begleitende Dreibein \underline{e}_{ξ^i} , $i = 1, 2, 3$!
- Berechnen Sie das Weglängenquadrat $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ in Kugelkoordinaten:

$$ds^2 = d\underline{\xi}^T (\underline{f}')^T \underline{f}' d\underline{\xi}$$

und geben Sie eine geometrische Deutung!

- Zeigen Sie, daß die i -te Zeile der inversen Matrix $(\underline{f}')^{-1}$ gegeben ist durch $\left\| \frac{\partial \underline{f}}{\partial \xi^i} \right\|^{-1} \underline{e}_{\xi^i}^T$ und bestimmen Sie den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten, d.h.

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \underline{f}}{\partial \xi^i} \right\|^{-1} \underline{e}_{\xi^i} \frac{\partial}{\partial \xi^i}$$

- Berechnen Sie $\det \underline{f}'$ und interpretieren Sie das Resultat geometrisch!
- Sei $\underline{g}(r, \theta, \varphi) = r^2 \underline{e}_r + \sin \theta \underline{e}_\theta$. Man berechne die Divergenz des Vektorfeldes \underline{g} in Kugelkoordinaten!
- Geben Sie den Laplace-Operator Δ in Kugelkoordinaten an und berechnen Sie $\Delta \left(\frac{1}{r} \right)$, für $r > 0$!

Aufgabe 2: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta f(\underline{x}) = 0 \forall \underline{x} \in U$ heißt harmonische Funktion. Hier ist Δ der gewöhnliche Laplaceoperator des \mathbb{R}^n , also in kartesischen Koordinaten $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$.

- (a) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta f(\underline{x}) = 0$! Können Sie sich denken, wie die Antwort für $n > 3$ aussieht?
- (b) Zeigen Sie, dass für den Fall $n = 2$ die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = \ln(|\underline{x}|)$ harmonisch ist!

Aufgabe 3: Berechnen Sie jeweils Divergenz und Rotation der folgenden Vektorfelder, skizzieren Sie die Vektorfelder und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse anhand der Skizzen!

(a)

$$\underline{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \underline{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z \end{pmatrix}$$

(b)

$$\underline{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \underline{g}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\underline{h} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \underline{h}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x - y \\ -z \end{pmatrix}$$

(d)

$$\underline{k} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \underline{k}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$