Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 2

Aufgabe 1: Sei $\underline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ x^4 + y^5 \\ x^3 \cos(y-z) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Approximieren Sie $\underline{f}$ linear um den Punkt $(0,1,1)$. Berechnen Sie $\underline{f}(\underline{x})$ in dieser linearen Approximation im Punkt $\underline{x} = (\frac{1}{10}, \frac{11}{10}, \frac{11}{10})$ und geben Sie den Fehler an!

Aufgabe 2: (*)

(a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_A = \underline{x}^T A \underline{y}$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist!

(b) Der zu $\mathbb{R}^3$ *duale Vektorraum* $(\mathbb{R}^3)^*$ ist der Raum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$. Ein Element des Dualraumes wird natürlicherweise über das Skalarprodukt mit einem Element aus $\mathbb{R}^3$ identifiziert, d.h., der zu $\underline{x}$ duale Vektor $\underline{x}^*$ ist eindeutig gegeben durch die Abbildung $\underline{x}^*(\cdot) = \langle \underline{x}, \cdot \rangle_A$. In der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^3$ sei nun $\underline{x}^*$ als (1×3)-Matrix gegeben, nämlich $\underline{x}^* = (3, -2, 5)$. Wie lautet der zugehörige Vektor $\underline{x}$?

(c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3 y^2 z$. Bestimmen Sie gemäß (b) den Vektor $\nabla f(1,2,3)$ bzgl. des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$!

Aufgabe 3: Die räumlichen elliptischen Koordinaten sind gegeben durch

$$\underline{v} : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \underline{v}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sinh r \cos\varphi \sin\theta \\ \sinh r \sin\varphi \sin\theta \\ \cosh r \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Jacobi Matrix von $\underline{v}$!

Aufgabe 4: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1^2+x_2^2}\cos(x_1 x_3)$. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix im Punkt (x, y, z) sowie die Ableitungsfunktion von $g(x) := f(x, x, x)$!

Sternchenaufgabe (*): Falls Sie eine Korrektur dieser Aufgabe wünschen, werfen Sie diese bis Freitag Mittag auf einem gesonderten Blatt in den Zettelkasten "Mathematik III für Physiker" im ersten Stockwerk des B-Turms ein! Die korrigierten Aufgaben werden in der folgenden Woche über den Rückgabekasten zurückgegeben.