

Übungen zu Mathematik III für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 1

Aufgabe 1: Skizzieren Sie folgende Flächen und geben Sie jeweils eine Parametrisierung der Fläche an:

- (a) den Graphen von $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$,
- (b) den Graphen von $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$, skizzieren Sie hier außerdem einige Höhenlinien,
- (c) $\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 4; x_3 > 0\}$,
- (d) die Mantelfläche eines Zylinders mit Höhe H und Radius R .

Aufgabe 2:

- (a) Seien $\underline{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$. Es bezeichne

$$T_{\underline{f}(\underline{u}_0)} = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \underline{y} = \underline{f}'(\underline{u}_0)\underline{x}\}$$

den Raum der Tangentialvektoren an $\underline{f}$ im Punkt $\underline{u}_0$. Der affine Tangentialraum ist dann gegeben durch $(\underline{u}_0, \underline{f}(\underline{u}_0)) + T_{\underline{f}(\underline{u}_0)}$. Man beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $(\underline{x}, \underline{y}) \in T_{\underline{f}(\underline{u}_0)}$.
- (ii) Es gibt eine Kurve $\underline{\gamma} \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m})$ mit $\underline{\gamma}(\mathbb{R}) \subset \text{Graph}(\underline{f}) := \{(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) : \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$ und mit $\underline{\gamma}(0) = (\underline{u}_0, \underline{f}(\underline{u}_0))$, $\underline{\gamma}'(0) = (\underline{x}, \underline{y})$.
- (b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$. Berechnen Sie die Schnittkurven von $\text{Graph}(f)$ (i) mit der $(x=1)$ -Ebene, (ii) mit der $(y=1)$ -Ebene und (iii) mit der von $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 1)$ aufgespannten Ebene, die den Punkt $(1, 1, 0)$ enthält. Man gebe eine Basis von $T_{f(1,1)}$ an (Begründung!). Man stelle $T_{f(1,1)}$ und die Tangentialebene in Parameter- und Normalenform dar.

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$.

- (a) Leiten Sie f an der Stelle $(1, 0, 1)$ in Richtung $(1, 2, 3)$ ab.
- (b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass ∇f im Punkt $(1, 1, 1)$ senkrecht auf der Tangentialebene der entsprechenden Niveauläche von f steht.

(c) Betrachten Sie für $t \in [0, \infty)$ die Kurve

$$\underline{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

und die Schnittkurve

$$\begin{pmatrix} \underline{\Phi}(t) \\ f(\underline{\Phi}(t)) \end{pmatrix}.$$

An welche Stelle ist die Geschwindigkeit, mit der die Schnittkurve durchlaufen wird, am größten?

Aufgabe 4: Die p -Norm auf $\mathbb{R}^n$ ($p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$) ist definiert durch

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \|\underline{x}\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

Als Norm erfüllt sie die Dreiecksungleichung (siehe Teilaufgabe (c)), d.h. für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|_p \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p. \quad (2)$$

(a) Für $p \geq 1$ betrachte man die p -Norm auf $\mathbb{R}^2$. Es sei $\|\underline{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

(i) Zeichnen Sie für $p = 1, 2, \infty$ jeweils den Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$, d.h. die Menge $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\underline{x}\|_p = 1\}$.

(ii) Zeigen Sie: $\|\underline{x}\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|\underline{x}\|_p$.

(iii) Betrachten Sie den Ausdruck (1) für $0 < p < 1$: Veranschaulichen Sie zunächst graphisch für $p = 1/2$, dass die Dreiecksungleichung verletzt wird. Beweisen Sie dies anschließend für allgemeines $0 < p < 1$.

(b) Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem Vektorraum V heißen *äquivalent*, wenn es positive Konstanten c_1, c_2 gibt mit

$$c_1 \|\underline{x}\|_b \leq \|\underline{x}\|_a \leq c_2 \|\underline{x}\|_b \text{ für alle } \underline{x} \in V.$$

Zeigen Sie: Alle p -Normen auf $\mathbb{R}^n$ ($p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$) sind äquivalent. Dies beinhaltet auch die Norm $\|\cdot\|_\infty$ definiert durch $\|\underline{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$.

Hinweis: Beginnen Sie mit dem Beweis der Äquivalenz von $\|\cdot\|_\infty$ und einer beliebigen anderen p -Norm.

(c) *Beweis von (2):* Beweisen zunächst für $p = 1$, dass die p -Norm die Dreiecksungleichung erfüllt.

Für $p > 1$ definiere man $z_k := |x_k + y_k|^{p-1}$ und zeige zunächst, dass $|x_k + y_k|^p \leq |x_k||z_k| + |y_k||z_k|$. Anschließend benutze man die Hölderungleichung

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|\underline{x}\|_p \|\underline{y}\|_q \text{ mit } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

um $\|\underline{x} + \underline{y}\|_p^p \leq \|\underline{x}\|_p \|\underline{z}\|_q + \|\underline{y}\|_p \|\underline{z}\|_q$ zu erhalten.