Mathematisches Institut der Universität München, WISE 2019/20

Probeklausur Mathe III für Physiker

Prof.Dr.P.Pickl

Aufgabe 1:

Gegeben seien für $x \in \{a,b,c\}$ die Abbildungen $d_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ gegeben durch

$d_a(x,y) = \mid x-y \mid, \quad d_b(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x=y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}, \quad d_c(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \mid x-y \mid < 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

a) Welche dieser Abbildungen sind Metriken? Beweisen Sie Ihre Aussage.

b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge, $a \in \mathbb{R}$. Für $x \in \{a,b,c\}$ sei A_x die Aussage der Konvergenz der Folge bzgl. des Abstandsbegriffes d_x, d.h.

$A_x : \forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ so dass $d_x(a_k, a) < \epsilon, \forall k \geq n$

(Ignonieren Sie hier, dass d_x nicht notwendiger Weise eine Metrik ist).

Zeigen oder wiederlegen Sie jeweils $A_x \to A_y$ für alle Paare $x, y \in \{a,b,c\}$

Aufgabe 2: Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^4 + xy$. Bestimmen Sie die Extremstellen von f und begründen Sie, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt!

Aufgabe 3: Sei nun

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) g ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

(ii) g ist in $(0,0)$ nicht total differenzierbar.

(iii) g ist überall partiell differenzierbar, die partiellen Ableitungen sind jedoch nicht stetig in $(0,0)$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$$

Aufgabe 5: Sei $\alpha \geq 1$. Geben Sie die größte offene Kreisscheibe an, auf der die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1+z)^n}{\alpha^n+1}$ konvergiert!