LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Peter Pickl
Sahand Tokasi

Wintersemester 2019/20
24.7.2020

Mathematik III für Physiker

Nachklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor ❏ Sonstiges ❏ ______________

Hauptfach: ❏ Physik ❏ Mathematik ❏ Inf. ❏ Stat. ❏ ______________

Nebenfach: ❏ ______________

- Die Nachklausur besteht aus 5 Fragen. Sie haben von 10:00 bis 12:00 Uhr Zeit die Klausur zu bearbeiten.
- Füllen Sie das Dekblatt sorgfältig aus. Vergessen Sie nicht ein Pseudonym (unten links vom Dekblatt) anzugeben. Schreiben Sie bitte weder in den Farben rot noch grün!
- Falls Sie nicht die Möglichkeit haben direkt auf PDF Daten zu schreiben, schreiben Sie Ihre Antworten mit Stift auf einem Blatt, und wenn Sie fertig sind, photografieren(scannen) Sie Ihre Lösungen in richtiger Reihenfolge ab. In diesem Fall sollten Sie auch ein Bild vom ausgefüllten Deckblatt ganz am Anfang von Ihrer Lösungendatei hinzufügen, und die Nummer der Aufgabe auf jedem Blatt angeben.
- Lösen Sie bitte **jede Aufgabe auf dem Blatt dieser Aufgabe** oder auf dessen Rückseite(falls Sie diese PDF-Datei von Nachklausur digital überarbeiten).
- Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll!
- Durch Angabe eines Pseudonyms links unten (z.B. die letzten vier Ziffern Ihrer Matrikelnummer) stimmen Sie der Veröffentlichung von Klausurergebnis und Pseudonym im Internet zu.
- Laden Sie Ihre Antworten, also entweder Ihre abgescannten Lösungen (mit dem Bild des ausgefühllten Deckblattes am Anfang) oder das bearbeitete PDF von der Nachklausur, ausschliesslich als EIN EINZIGES PDF-DOKUMENT beim folgenden Link hoch. Geben Sie Ihren Vor- und Nachnamen als Dateinamen und als username beim hochladen an.
- https://syncandshare.lrz.de/preparefilelink?folderID=26q5PD3LwjufnGKLNNFrc
- Abgaben, die später als 12:10 Uhr ankommen, werden nicht berücksichtigt.

Pseudonym	1	2	3	4	5	$\sum$
	/10	/10	/10	/10	/10	/50

Aufgabe 1. [10 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} dx = -\pi$$

Hinweis: Welcher Typ von Singularität ist $z = \frac{\pi}{2}$? Verformen Sie den Integrationsweg zu einem, der die Singularität $z = \frac{\pi}{2}$ durch einen kleinen Halbkreis in der oberen Halbebene ausspart ($\rightarrow\curvearrowright\rightarrow$) und verwenden Sie eine Translation in Variable $x \rightarrow t = x - \frac{\pi}{2}$. Berechnen Sie die beiden entstehenden Integrale jeweils durch geschicktes Schließen des Integrationswegs mit einem "unendlich großen" Halbkreis! Zeigen Sie im Detail, dass die jeweiligen Halbkreise keine Beiträge liefern!

Aufgabe 2. [10 Punkte]

Seien $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ und $f : V \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^5 - 16y^5$. Bestimmen Sie die stationären(kritischen) Punkte von f, sowie die zugehörigen Funktionswerte.

Aufgabe 3. [10 Punkte]

Gegeben sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = xy \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ total differenzierbar ist. Berechnen Sie nun die partiellen Ableitungen von f und untersuchen Sie diese in $(0, 0)$ auf Stetigkeit.

Aufgabe 4. [10 Punkte]

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, y + 1)$, ausserdem die durch die euklidische Norm und die Einsnorm induzierte Metriken $|| \ (x, y) \ ||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $|| \ (x, y) \ ||_1 = | \ x \ | + | \ y \ |$.
Überprüfen Sie für jede dieser Metriken, ob f eine Kontraktion ist. Hat f auf $\mathbb{R}^2$ einen Fixpunkt? Ist dieser eindeutig?
Hinweis: f heisst Kontraktion falls $|| \ f(a) - f(b) \ || \leq k \ || \ a - b \ ||$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^2$ mit $k \in [0, 1)$.

Aufgabe 5. [10 Punkte]

Entwickeln Sie $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$ in folgende Laurentreihen:

(a) um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(0,1)}(0)$;

(b) um $z_0 = 0$, konvergent in der Kreisscheibe $K_{(1,2)}(0)$;

Hierbei: $K_{(r,R)}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.