MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN SoSe 2013

Übungen zu Mathematik II für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 11

Aufgabe 1:
Sei $\underline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\underline{f}(t) = (\cos(2\pi t^3), \sin(2\pi t^3))$.

(a) Berechnen Sie $\underline{f}'(t)$, $t \in [0,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{f}'(t) \cdot \underline{f}(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ gilt und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 2: Skizzieren Sie folgende Flächen und geben Sie jeweils eine Parametrisierung der Fläche an:

(a) den Graphen von $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 + (x_2)^2$,

(b) den Graphen von $f(x_1, x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$,

(c) $\{(x_1, x_2, x_3) : (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 4;\ x_3 > 0\}$,

(d) die Oberfläche eines Zylinders mit Höhe H und Radius R.

Aufgabe 3:

(a) Seien $\underline{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $\underline{u}_0 \in \mathbb{R}^n$. Es bezeichne

$$T_{\underline{f}(\underline{u}_0)} = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \underline{y} = \underline{\underline{f}}'(\underline{u}_0)\underline{x}\}$$

den Raum der Tangentialvektoren an $\underline{f}$ im Punkt $\underline{u}_0$. Der affine Tangentialraum ist dann gegeben durch $(\underline{u}_0, \underline{f}(\underline{u}_0)) + T_{\underline{f}(\underline{u}_0)}$. Man beweise, dass die folgenden Aussagen (i) und (ii) äquivalent sind:

(i) $(\underline{x}, \underline{y}) \in T_{\underline{f}(\underline{u}_0)}$.

(ii) Es gibt eine Kurve $\underline{\gamma} \in C^1(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+m})$ mit $\underline{\gamma}(\mathbb{R}) \subset \text{Graph}(\underline{f}) := \{(\underline{x}, \underline{f}(\underline{x})) : \underline{x} \in \mathbb{R}^n\}$ und mit $\underline{\gamma}(0) = (\underline{u}_0, \underline{f}(\underline{u}_0))$, $\underline{\gamma}'(0) = (\underline{x}, \underline{y})$.

(b) Sei $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\underline{f}(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ gegeben. Berechnen Sie die Schnittkurven von Graph($\underline{f}$) (i) mit der (x=1)-Ebene, (ii) mit der (y=1)-Ebene und (iii) mit der von $(1,2,0)$, $(0,0,1)$ aufgespannten Ebene, die den Punkt $(1,1,0)$ enthält. Man gebe eine Basis von $T_{\underline{f}((1,1))}$ an (Begründung!). Man stelle $T_{\underline{f}((1,1))}$ und die Tangentialebene in Parameter- und Normalenform dar.

Aufgabe 4: Man zeige: Die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $F(\underline{x}, t) = t^{-n/2} \exp(-\|\underline{x}\|^2/(4t))$ ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung $\Delta F - \partial F/\partial t = 0$.

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$.

(a) Leiten Sie f an der Stelle $(1, 0, 1)$ in Richtung $(1, 2, 3)$ ab.

(b) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass ∇f im Punkt $(1, 1, 1)$ senkrecht auf der Tangentialebene der entsprechenden Niveaufläche von f steht.

(c) Betrachten Sie für $t \in [0, \infty)$ die Kurve

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

und die Schnittkurve

$$\begin{pmatrix} \mathbf{\Phi}(t) \\ f(\mathbf{\Phi}(t)) \end{pmatrix} .$$

An welche Stelle ist die Geschwindigkeit, mit der die Schnittkurve durchlaufen wird am größten?

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in der Übungsgruppe ab, zu der Sie angemeldet sind.

Übungsblätter und Informationen unter:
http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~bohmmech/Teaching/MP2SoSe2013/index.php