MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2012/2013

Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 11

Aufgabe 1: Beweisen Sie:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \sin(\beta)\cos(\alpha)$$

und

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Aufgabe 2: Seien $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie: $f \circ g$ ist stetig.

Aufgabe 3: Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\lim\limits_{h \to 0}(f(x-h) - f(x+h)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ist f stetig? (Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|$ stetig ist.

Aufgabe 5:

1. Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to I$ stetig. Zeigen Sie, dass ein $x \in I$ existiert mit $f(x) = x$.
2. Sei nun $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und es gelte $\forall x, y \ \ |F(x) - F(y)| \leq C|x - y|$ mit $C \in [0, 1)$. Betrachten Sie die Iteration $x_{n+1} = F(x_n)$. Zeigen Sie, dass es für diese Iteration einen eindeutigen Fixpunkt gibt. Es existiert also genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = x$.

   Hinweis: Untersuchen Sie, ob diese Folge ein Cauchyfolge ist.

Aufgabe 6: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte $f(x_0) > 0$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon\}$ von x_0 gibt, mit $f(x) > 0, \ \forall x \in U_\epsilon(x_0)$.