MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2012/2013

Übungen zu Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D. Dürr

Blatt 5

Aufgabe 1:

(a) Wieviele $0-1$ Folgen der Länge n gibt es, die genau m Einser haben?

Hinweis: Binomische Formel.

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in der Münzwurfreihe von N Würfen genau k mal Kopf zu haben?

Aufgabe 2: Die Symbole $\wedge\,;\vee$ stehen für die logischen "und" und "oder", die Symbole $\forall\,;\exists$ stehen "für alle" und "es existiert", die Symbolreihung $\{x|...\}$ steht für die Menge aller x, die ... erfüllen. Vervollständigen Sie in den folgenden Ausdrücken:

Seien M_1 und M_2 Mengen, dann gilt

(a) $M_1 \cap M_2 = \{x|x \in .....\}$

(b) $M_1 \cup M_2 = \{x|x \in .....\}$

(c) $M_1 \subset M_2 \Longleftrightarrow \forall x \in ....$

(d) Sei $I \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Familie von Mengen. Dann ist

$$\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha = \{x|.....\}$$

und

$$\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha = \{x|.....\}$$

(e) Sei Ω eine Menge und $M \subset \Omega$. Dann bezeichnet $\Omega\backslash M = M^c := \{\omega \in \Omega | \omega \notin M\}$. Sei $M_1 \subset M_2 \subset \Omega$. Zeigen Sie: $M_2^c \subset M_1^c$.

(f) Zeigen Sie

$$\left(\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha^c$$

Hinweis: Gleichheit von Mengen $A = B$ kann man zeigen, indem man $A \subset B$ und $B \subset A$ (vgl. (c)) zeigt.

Aufgabe 3:

Der Multinomialkoeffizient (auch Polynomialkoeffizient genannt) vom Grade $r \in \mathbb{N}$ ist definiert als

$$\begin{pmatrix} & n & \\ n_1 & n_2 \ldots & n_r \end{pmatrix} := \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!}\,.$$

Seien $x_1, \ldots, x_r$ gegeben. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Multinomialformel

$$(x_1 + \ldots + x_r)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_r=0 \\ n_1+\ldots+n_r=n}}^{n} \begin{pmatrix} & n & \\ n_1 & \ldots & n_r \end{pmatrix} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}\,.$$

Das Summenzeichen ist so zu verstehen, dass genau über diejenigen r-Tupel $(n_1, \ldots, n_r) \in \{0, \ldots, n\}^r$ summiert wird, bei denen $n_1 + \ldots + n_r = n$ ist.

Bemerkung: Der Multinomialkoeffizient gibt auch die Anzahl der Zuordnungen (ohne Berücksichtung der Reihenfolge) von n Objekten auf r Kästen an.

Aufgabe 4: *Bonusaufgabe:*

(Gesetz der großen Zahlen)

Sei $\{0,1\}^n = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) | x_k \in \{0,1\}, k = 1, 2, ..., n\}$ die Menge der $0-1$ n-Tupel. Sei für $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{N}_n^\varepsilon = \{\vec{x} \in \{0,1\}^n | \ |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \frac{1}{2})| > \varepsilon\}$$

Machen Sie sich die Bedeutung von $\mathcal{N}_n^\varepsilon$ klar.

Zeigen sie nun das Gesetz der großen Zahlen für lange $0-1$ n-Tupel:

$$\frac{1}{2^n}|\mathcal{N}_n^\varepsilon| \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

Dies bedeutet dass die relativen Häufigkeiten von 0 oder 1 typischerweise ungefähr gleich sind. (Fluktuationen sind von der Größenordnung $\sqrt{n}$).

Hinweis: Die Aufgabe ist nicht schwer. Man darf nur keine Angst vor Summen haben:

1. Für die Elemente der Menge $\mathcal{N}_n^\varepsilon$ gilt:

   $$\frac{|\sum_{k=1}^{n}(x_k - \frac{1}{2})|}{n\varepsilon} > 1$$

   Im Hinblick auf $\mathcal{N}_n^\varepsilon \subset \{0,1\}^n$ zeige man dass

   $$|\mathcal{N}_n^\varepsilon| \leq \sum_{\vec{x} \in \{0,1\}^n} \frac{|\sum_{k=1}^{n}(x_k - \frac{1}{2})|^2}{n^2\varepsilon^2}$$

   .

2. Man zeige:

$$|\sum_{k=1}^{n}(x_k-\frac{1}{2})|^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k-\frac{1}{2})^2+\sum_{k,j=1,k\neq j}^{n}(x_k-\frac{1}{2})(x_j-\frac{1}{2})$$

wobei die zweite Summe eine Doppelsumme ist, in der über k und j summiert wird, jedoch müssen k und j verschieden sein. Von beiden Summen können Sie nun die Summe über alle $0-1$ n-Tupel bilden.