Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 4

*Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in **Dreier- oder Vierergruppen** gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 16.11., 14:00 Uhr abgegeben werden. **Nur** diese Aufgaben werden korrigiert.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. Geben Sie ein Beispiel für eine zweistellige Relation R auf Mengen M und N Ihrer Wahl, die keine Funktion ist.
2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$. Berechnen Sie
   (a) das Bild des Intervals $[-1, 1]$ unter f
   (b) das Urbild des Intervals $[0, 1]$ unter f
3. Zeigen Sie, dass f von 2) weder injektiv noch surjektiv ist.
4. Im Folgenden sind die Definitions- und Wertbereiche von f eingeschränkt worden. Prüfen Sie ob die entsprechende Funktionen injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv sind:
   (a) $f_1 : \mathbb{R} \to [0, \infty) \quad x \mapsto x^2$
   (b) $f_2 : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$
   (c) $f_3 : [0, 1] \to [0, 1] \quad x \mapsto x^2$

Aufgabe 2: (*Zur Abgabe*)
Sei $f : D \to W$ für die Mengen D, W eine bijektive Funktion. Zeigen Sie, dass $\forall y \in W$ die Gleichung $f(x) = y$ genau eine Lösung $x \in D$ hat.

Aufgabe 3: Beweisen Sie die folgende Aussage. Seien A, B, C, D Mengen, $f : A \to B$, $g : C \to D$ Funktionen und $f(A) \subseteq C$. Dann gilt f injektiv $\wedge$ g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv.

Aufgabe 4: Beweisen oder widerlegen Sie

1. Seien A und $B \subseteq A$ jeweils abzählbar unendliche Mengen, dann ist $A \setminus B$ endlich.

2. Sei A abzählbar unendlich und B endlich, dann ist $A \setminus B$ abzählbar unendlich.

Aufgabe 5:

1. Sei $(F_4, \oplus, \odot)$ mit $F_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ und $\oplus, \odot : F_4 \times F_4 \to F_4$, wie in der Vorlesung eingefürt (Addition/Multiplikation mod 4). Zeigen Sie, dass F_4 kein Körper ist.

2. Die Matrizen
$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R} \right\}$$
mit der Verknüpfung $\cdot$ gegeben durch
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$
bilden eine Gruppe, die man 2D-Drehgruppe nennt und SO(2) bezeichnet. Diese Gruppe beschreibt die Rotationen in $\mathbb{R}^2$.

   Ist SO(2) kommutativ? Begründen Sie Ihre Antwort. Die Gruppe der Rotationen in $\mathbb{R}^3$ nennt man SO(3). Überlegen Sie, ob diese Gruppe kommutativ ist.

Aufgabe 6: Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + bc) \end{aligned}$$

ein Körper ist.
Bemerkung: Diesen Körper werden wir bald in der Vorlesung als Körper der komplexen Zahlen ausführlicher kennenlernen.