Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 11

Die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, können in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 18.01.2019, 14:00 Uhr zur Korrektur abgegeben werden.*

Aufgabe 1: Sei $\mathcal{P}^k := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \middle| \exists \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_k x^k \right\}$ die Menge der reelen Polynome vom Grad $k \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $f \in \mathcal{P}^k \Rightarrow f$ ist stetig.

(b) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}^k$ mit $\alpha_k > 0$ gilt

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ für } k \text{ gerade} \\ \pm\infty \text{ für } k \text{ ungerade} \end{cases} \quad .$$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{P}^k$ und $p \in \mathbb{R}$ Nullstelle von f, dann gilt:

$$\lim_{x \downarrow p} f(x)^{-1} \in \{-\infty, +\infty\}.$$

Was für würde man im Fall $\lim_{x \to p} f(x)^{-1}$ erwarten?

(d) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Was erwarten Sie für $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{x}$?
Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellung von sin aus Aufgabe 4, Blatt 10.

Aufgabe 2: *(Zur Abgabe)*

(a) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie mithilfe des ϵ-δ-Kriteriums, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis: Überprüfen Sie zunächst nur die Stetigkeit bei $x = 0$ und benutzen Sie dann die Funktionalgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass für alle stetigen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auch $g(\cdot) := |f(\cdot)|$ auf $\mathbb{R}$ stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Stetigkeit von $x \mapsto |x|$ und überlegen Sie sich, dass mithilfe eines in der Vorlesung bewiesenen Satzes, der Raum der stetigen Funktionen bzgl. der Funktionsverknüpfung eine Gruppe ist.

Aufgabe 3:

(a) Beweisen die folgende Aussage für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Punkte $p \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \downarrow p} f(x) = \lim_{x \uparrow p} f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to p} f(x) \text{ existiert.}$$

(b) Beweisen Sie, dass folgende Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist:

$$f(x) := \begin{cases} x^3 \text{ für } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \text{ sonst} \end{cases} .$$

Hinweis: Benutzen Sie dazu Teil a).

Aufgabe 4: *(Zur Abgabe)*
Welche der folgenden Funktionen haben Unstetigkeitsstellen? Geben Sie ggf. die Art der Unstetigkeitsstelle an und beweisen Sie Ihre Antworten.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 2 \\ 4 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \neq 2 \\ 1 & \text{für } x = 2 \end{cases}$

(d) $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{9x^2-6x+1}{3x-1}$

(e) $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{9x^2-6x+1}{3x+1}$

(f) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{8x+4}{5x^2}$

Überlegen Sie sich eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und dort nirgendwo stetig ist.

Aufgabe 5: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $p \in D$ mit $f(p) \neq 0$. Zeigen Sie, es gibt eine δ-Umgebung $U_\delta(p)$ von p, sodass für alle $x \in U_\delta(p) \cap D$ gilt: $f(x) \neq 0$.

Aufgabe 6: Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $F([a, b]) \subset [a, b]$. Zeigen Sie, dass es dann mindestens eine Lösung $x^* \in [a, b]$ der Gleichung $F(x^*) = x^*$, also einen Fixpunkt on F, gibt.