MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2018/2019

Weihnachts-Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. D.-A. Deckert

Blatt 10

Hiermit möchten wir Ihnen ein paar Weihnachtsgeschichten mit auf den Weg geben, die die erlernten analytischen und algebraischen Konzepte in Zusammenhang bringen sollen. Das Blatt ist sehr lang, aber Vieles sind nur Hinweise und "Geschichten". Einige der Aufgaben sind eher leicht, andere recht schwierig. Seien Sie also nicht enttäuscht, wenn Sie nicht ganz allein auf die Lösung kommen, oder Sie viel Zeit benötigen. Versuchen Sie sich aber trotzdem im Sinne der letzten Vorlesung erstmal daran ohne nachzuschauen – die Lösungen stehen in nahezu jedem Analysis Buch. Falls eine Lösung nicht auf Anhieb klappt, dann üben Sie sich zuerst darin, Ihr Problem mit Ihrem ersten Lösungsversuch möglichst genau zu definieren und lesen Sie erst dann nach. Wir wünschen Ihnen schöne und erholsame Festtage und kommen Sie gut ins neue Jahr!

Wie immer können die Aufgaben, neben denen "Zur Abgabe" steht, in ***Dreier- oder Vierergruppen*** *gelöst und mithilfe von UniWorX bis Freitag, 11.01.2019, 14:00 Uhr zur Korrektur abgegeben werden.*

Aufgabe 1: (*Zur Abgabe*)
Weisen Sie nach, dass der Absolutbetrag einer komplexen Zahl z, d.h. $\|z\| := (z\bar{z})^{\frac{1}{2}}$, eine Norm auf dem Körper $\mathbb{C}$ definiert. Folgern Sie, dass durch $d(z_1, z_2) := \|z_1 - z_2\|$ eine Metrik auf $\mathbb{C}$ definiert ist.
Beobachten Sie, dass im Allgemeinen $z^2 \neq \|z\|^2$. Zeigen Sie, dass aufgrund der Eigenschaften der Norm jedoch $\forall k \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C}: \ \|z^k\| = \|z\|^k$ gilt.

Aufgabe 2: (*Zur Abgabe*)

(a) Geben Sie jeweils Real- und Imaginärteil sowie den Absolutbetrag an:

  (a) $(9-4i)(8+3i)$
  (b) $\frac{8+7i}{6-i}$

(b) Lösen Sie folgende Gleichungen in $\mathbb{C}$:

  (a) $4z^2 + 5z + 1 = 0$
  (b) $iz^2 + 3iz + 2 = 0$
  (c) $z^3 - i = 0$

Aufgabe 3: (*Zur Abgabe*)
Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, $A \subseteq M$ eine abgeschlossene Teilmenge von M und $f : A \to A$, sodass

$$\exists \gamma \in [0, 1)\ \forall x, y \in A : d(f(x), f(y)) \leq \gamma d(x, y).$$

Zeigen Sie, dass die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ genau eine Lösung $x^* \in A$ besitzt.

Hinweis: Formulieren Sie dazu den Beweis des entsprechenden Satzes für normierte Räume aus der Vorlesung um.

Aufgabe 4: In der Vorlesung wurde die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf den reelen Zahlen eingeführt.

(a) Sei $(M, \|\cdot\|)$ nun ein vollständiger normierter Raum, auf dem eine Verknüpfung

$$\odot : M \times M \to M, (x, y) \mapsto x \odot y$$

mit $\forall x \in M, k \in \mathbb{N}_0 : \ \|x\|^k = \|x^{\odot k}\|$ definiert ist, wobei wir folgende Abkürzung einführen:

$$x^{\odot k} := \underbrace{x \odot x \odot \ldots \odot x}_{k\text{-mal}}.$$

Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion

$$\exp : M \to M, x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

in $(M, \|\cdot\|)$ wohldefiniert ist.

Insbesondere gibt es also die Exponentialfunktion auf $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$. Überlegen Sie sich dazu (ohne einen Beweis angeben zu müssen), dass in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ auch die Funktionalgleichung $\exp(x + y) = \exp(x) \odot \exp(y)$ mithilfe des Cauchy-Produkts bewiesen werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass $\forall z \in \mathbb{C} : \ \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ gilt.
Hinweis: Betrachten Sie dazu die Grenzwerte der jeweiligen Partialsummen.

(c) Zeigen Sie, dass $\forall \phi \in \mathbb{R} : \ \|e^{i\phi}\| = 1$. Zeichnen Sie für eine Wahl $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ die Zahl $e^{i\phi}$ auf der komplexen Ebene ein und folgern Sie mithilfe der geometrischen Definition von sin und cos, dass

$$\sin(\phi) = \operatorname{Im} e^{i\phi}, \quad \cos(\phi) = \operatorname{Re} e^{i\phi} \tag{1}$$

und somit

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$$

gelten muss.

Hinweis: Im rechtwinkligen Dreieck ist sin (bzw. cos) definiert durch das Verhältnis von Gegenkathete (bzw. Ankathete) zur Hypotenuse.

Weihnachtsgeschichte: Sobald wir π eingeführt haben (siehe Weihnachtsgeschichte zu f) unten) kann man aus dieser als Euler'sche Formel bezeichneten Gleichung die Gleichung $e^{i\pi} = -1$ herleiten. Diese wird manchmal *schönste Gleichung der Mathematik* genannt, da sie die irrationalen Zahlen e und π miteinander über die komplexe Einheit i verbindet.

(d) Ausgehend von (**??**) können wir die Funktionen sin und cos für ϕ auf ganz $\mathbb{R}$ als Reihen definieren. Leiten Sie eine Reihendarstellung von sin und cos aus der obigen Definition der Exponentialfunktion her.

Hinweis: Benutzen Sie unsere Rechenregeln für Limiten, um die Reihendarstellung von $e^{i\phi}$ nach geraden und ungeraden Potenzen von $i\phi$ zu ordnen, und bestimmen Sie die auftretenden Vorzeichen und beobachten Sie mögliche Auslöschungen einiger Summanden.

(e) Zeigen Sie weiter mithilfe der Teilaufgabe b), dass

$$\sin(\phi) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right) \tag{2}$$

$$\cos(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right). \tag{3}$$

(f) Beweisen Sie unter Verwendung der Funktionalgleichung sowie Teilaufgabe e), dass $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y),$$
$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - sin(x)\sin(y).$$

Weihnachtsgeschichte: Dies sind zwei von mehreren Additionstheoremen für sin und cos. Diese können nun recht einfach durch die Darstellungen (**??**) und (**??**) hergeleitet werden. Wir werden dazu bald die Existenz einer Nullstelle von cos im Intervall $[0, 2]$ beweisen. Diese Nullstelle bekommt den Namen $\frac{\pi}{2}$ und mithilfe der Additionstheoreme werden wir dann die Periodizität von sin und cos bestimmen.

(g) Zeigen Sie, dass die Abbildungen

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

stetige Funktionen sind.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass die Exponentialfunktion $\exp(z)$ in $z = 0$ stetig ist. Benutzen Sie dazu die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und zum Beispiel den Satz über dominierte Konvergenz, um eventuelle Limiten zu vertauschen. Benutzen Sie weiter die Funktionalgleichung, um die Stetigkeit für alle $z \in \mathbb{C}$ nachzuweisen.

Schließlich können Sie unsere Rechenregeln für Limiten benutzen, um auch auf die Stetigkeit von sin und cos zu schließen.

(h) Wählen Sie komplexe Zahlen $x, y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\phi \in (0, 2\pi)$ und zeichnen x, y und folgende weitere Zahlen

(a) $x + y$ (b) $x + iy$ (c) $x - y$ (d) $x \cdot y$ (e) x^2 (f) $(x + iy)^2$
(g) $e^{i\phi}$ (h) $xe^{i\phi}$ (i) $\sqrt{x}$

in eine Skizze der komplexen Ebene ein. Interpretieren Sie die Multiplikation zweier komplexen Zahlen, die Multiplikation einer komplexen Zahl mit $e^{i\phi}$ sowie das Ziehen der Quadratwurzel geometrisch.

Aufgabe 5: Betrachten Sie den Raum der reellen 2×2-Matrizen

$$\mathbb{R}^{2\times 2} := \left\{ M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \,\middle|\, M_{ij} \in \mathbb{R} \text{ für } i, j \in \{1, 2\} \right\}$$

mit der üblichen Matrizenaddition, skalaren Multiplikation sowie der Matrizenmultiplikation als Verknüpfungen.
Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir definieren

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A :\Leftrightarrow \ \forall i, j \in \{1, 2\} : \lim_{n\to\infty} (A_n)_{ij} = A_{ij}.$$

(a) Sei $\phi \in \mathbb{R}$ und $G := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\exp(G\phi) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(G\phi)^k}{k!} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Berechnen Sie G^k für einige $k \in \mathbb{N}_0$ von Hand, beobachten Sie z. B. $G^5 = G$, und leiten Sie daraus eine allgemeine Formel für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ab.

Weihnachtsgeshichte: Beobachten Sie, wie sich der angegebene Konvergenzmodus dem ersten Anschein nach von dem auf normierten Räumen unterscheidet. Da durch die Matrixmultiplikation jedes $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine lineare Abbildung auf dem normierten Vektorraum $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ durch $v \mapsto Mv$ induziert, kann man recht natürlich folgende Norm auf $\mathbb{R}^{2\times 2}$ einführen:

$$\|M\|_{\mathbb{R}^{2\times 2}} := \sup_{v\in\mathbb{R}^2, \|v\|_2=1} \|Mv\|_2.$$

Genauso, wie wir für Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ gezeigt haben, dass diese Folge genau dann konvergiert, wenn sowohl Real- wie Imaginärteil der Folge konvergieren, kann man für Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^{2\times 2}})$ zeigen, dass diese genau dann konvergieren, wenn alle Folgen der Matrixkoeffizienten konvergieren. Somit ist der obige Konvergenzmodus derselbe wie auf $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \|\cdot\|_{\mathbb{R}^{2\times 2}})$. Diesen Zusammenhang kann man auf endlichdimensionalen Räumen recht allgemein zeigen.

(b) Zeigen Sie, dass

$$R_\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, v \mapsto \exp(G\phi)v$$

ein Homomorphismus auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und weiter, dass

$$R := \left\{ R_\phi \,\middle|\, \phi \in \mathbb{R} \right\}$$

eine kommutative Gruppe bezüglich der gewöhnlichen Verkettung $\circ$ von Funktionen ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 4 (f).

Weihnachtsgeschichte: Die Gruppe $(R, \circ)$ wird Drehgruppe auf $\mathbb{R}^2$ genannt und mit SO(2) bezeichnet. Dies steht abkürzend für *spezielle orthogonale Gruppe von* 2×2 *Matrizen*. Beobachten Sie, wie diese Gruppe über die Exponentialfunktion aus G erzeugt wird, weshalb R als Generator der Drehgruppe bezeichnet wird. Im nächsten Semester werden Sie lernen, dass $\exp(G\phi)$ die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\phi} f(\phi) = G f(\phi)$$

für Anfangswert $\exp(0) = 1_{\mathbb{R}^2}$, wobei $1_{\mathbb{R}^2}$ die Identität $v \mapsto v$ auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Diese Sichtweise wird später z. B. in der Quantenmechanik interessant. Dort erzeugen die Operatoren des Drehimpulses und des Spins entsprechende Drehgruppen auf dem Raum der quantenmechanischen Zustände. Beobachten Sie, dass die Kommutativität unter Matrixmultiplikation eine Besonderheit der Matrizen in $SO(2)$ ist. Im Allgemeinen ist die Matrixmultiplikation von Matrizen nicht kommutativ, weshalb die Funktionalgleichung $\exp(A)\exp(B) = \exp(A + B)$ nicht im Allgemeinen für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gelten kann. Spätestens in der Quantenmechsnik werden für den nicht-kommutativen Fall die sogenannt Baker–Campbell–Hausdorff Formel als Verallgemeinerung kennenlernen.