MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2014/2015
15.01.2015

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. Dürr

Blatt 13

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.

13.1 Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

Entwickeln Sie diese Funktion um den Nullpunkt bis zur zweiten Ordnung und geben Sie den Restterm an. Überlegen Sie sich, dass diese Funktion eine Taylorreihe erzeugt, die unendlichen Konvergenzradius hat, aber nicht gegen die Funktion konvergiert.

13.2 Sei $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei die Menge der Nullstellen von f nicht leer und $\tilde{x} = \inf\{x | f(x) = 0\}$. Zeigen Sie: $f(\tilde{x}) = 0$.

13.3 An welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ oder } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N}, \text{ gekürzt, } x \in [0,1] \end{cases}$$

stetig?

13.4 Bilden Sie die Potenzreihe von $\ln(1 + x)$ um die Stelle $x = 0$.

13.5 * Sei $C[a, b] = \{f | f : [a, b] \to \mathbb{R}, f\ \textit{stetig}\}$. Zeigen Sie, dass $C[a, b]$ vollständig bezüglich der Supremumsnorm $||f||_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$ ist. Das bedeutet: Sei $(f_n)_n \in C[a, b]$ eine Cauchyfolge, dann existiert $f \in C[a, b]$, so dass $\lim\limits_{n \to \infty} ||f_n - f||_\infty = 0$.

Hinweise:

1. Notieren Sie zunächst die Epsilondefinition für „$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C[a, b]$ ist eine Cauchyfolge unter der $|| \cdot ||_\infty$ – Norm“.
2. Welche Eigenschaft hat $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für festes $x \in [a, b]$?
3. Nutzen Sie die Stetigkeit der Betragsfunktion.