MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

WS 2014/2015
04.12.2014

Übungen zur Mathematik I für Physiker

Prof. Dr. Dürr

Blatt 9

Falls Korrektur erwünscht, geben Sie das Blatt bitte in Ihrer Übungsgruppe ab.

9.1 Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Reihen

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k!}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n^2}$
(e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k} x^{2k}$

9.2 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ können Sie $f(x)$ als Potenzreihe in der Form $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ schreiben? Geben Sie diese Potenzreihe explizit an.

9.3 Die Leibniz-Reihe ist definiert als

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergent ist und berechnen Sie, dass $S = \frac{\pi}{4}$.
Hinweis: Machen Sie sich klar, dass gilt: $\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 (-x^2)^n dx$

9.4 In der Vorlesung wurde der Limes Superior bzw. der Limes Inferior als der größte bzw. der kleinste Häufungspunkt einer Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert (falls diese nicht existieren als $\pm\infty$)

(a) Berechnen Sie für die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

die Werte

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \ \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}, \ \text{und} \ \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\,.$$

Beweisen oder widerlegen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie für eine beschränkte Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup\{x_k : k \geq n\}\right)$$
$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf\{x_k : k \geq n\}\right)$$